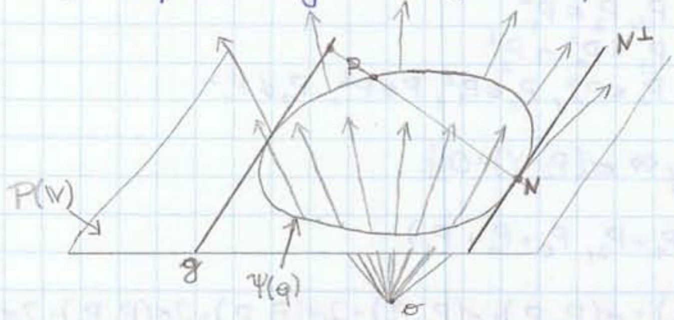
6.5.09

Lin. Algebra UE

VII, 10.3: 7
10.4.: 1, 3, Bew. Satz 10.4.10 (inkl. 10.4.8c, 10.4.9c)
10.5.: 2, 3, 4
10.6: 1

10.4.1 $\Psi(q) \neq \emptyset$ regulärer Kegelschnitt, $\dim P(V) = 2$



a) $N \in \Psi(q) \Rightarrow (N \vee P) \cap \Psi(q) = \{N, P\} \quad \forall P \in \Psi(q) \setminus \{N\}$

Mit dieser Konstruktion werden alle Geraden durch N außer $N^\perp$ erfasst.

Da diese Tangente ist, schneidet sie $\Psi(q)$ lt. Satz 10.4.1 nur in N.

ZZ: $\Psi(q)$ ist gleichmächtig zu einer Gerade g (erfüllt $\exists$ Bijektion $\Psi(q) \to g$)

Sei $g = N^\perp + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow f: \Psi(q) \setminus \{N\} \to g: P \mapsto (N \vee P) \cap g$ ist bijektiv.

Bew.: •) f injektiv:

$N \vee P \neq N \vee Q \Rightarrow f(P) \neq f(Q) \quad \forall Q \neq P \in \Psi(q) \setminus \{N\}$

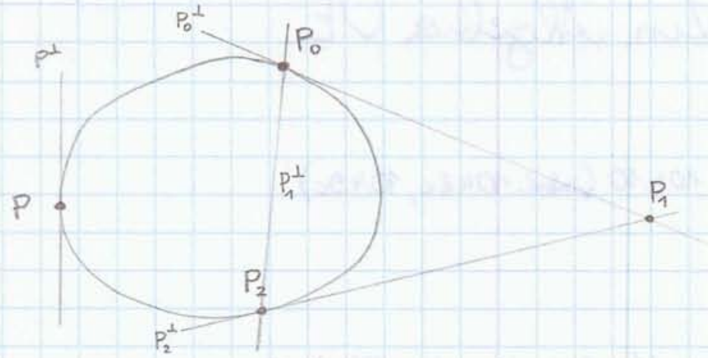
•) f surjektiv:

Sei $Q \in g$ beliebig, dann $\exists^* N \vee Q$. Da $Q \notin N^\perp$ existiert ein Punkt P mit $P = (N \vee Q) \cap \Psi(q)$

$N^\perp$ geht unter f genau in den Fernpunkt von g über.

zz:

b) $\Psi(q)$ hat bzgl. $\mathbb{P} := (P_0, P_1, P_2, P)$ die Gl.: $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$



lt. Konstruktion gilt: •) $P_0, P_2 \in P_1^\perp$
•) $P_1 = P_0^\perp \cap P_2^\perp$
•) $P_0 \in P_0^\perp,\ P_2 \in P_2^\perp,\ P \in P^\perp,\ P_1 \notin P_1^\perp$

$$P_i^\perp = \{ Ky \in P(V) \mid p_i \perp y \Leftrightarrow \sigma(P_i, Y) = 0 \}$$

$$\Rightarrow 0 = \sigma(P, P) = \sigma(P_0 + P_1 + P_2,\ P_0 + P_1 + P_2)$$

$$= \underbrace{\sigma(P_0, P_0)}_{0} + \sigma(P_1, P_1) + \underbrace{\sigma(P_2, P_2)}_{0} + \underbrace{2\sigma(P_0, P_1)}_{0} + 2\sigma(P_0, P_2) + \underbrace{2\sigma(P_1, P_2)}_{0}$$

$$\Leftrightarrow \sigma(P_0, P_2) = -\frac{1}{2} \underbrace{\sigma(P_1, P_1)}_{=: \lambda}$$

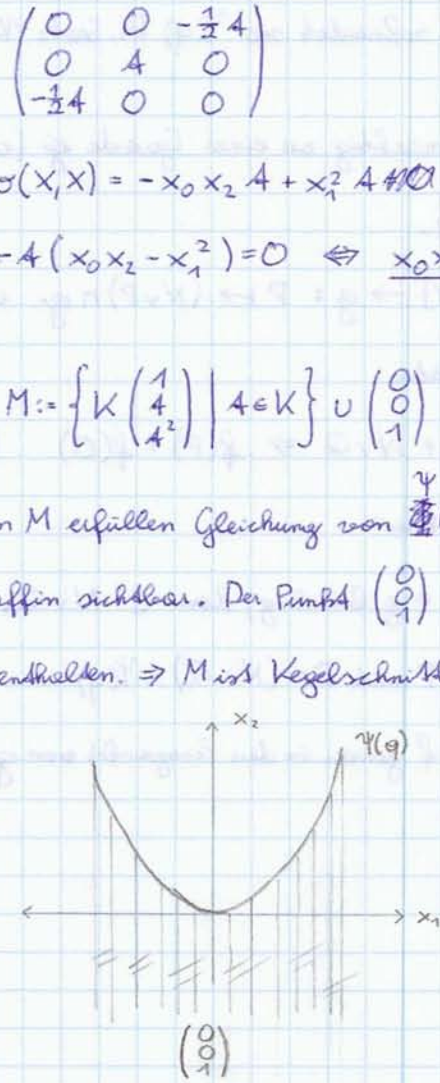
$$\Rightarrow \sigma(P, P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ -\frac{1}{2}\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow q(X) = \sigma(X, X) = -x_0 x_2 \lambda + x_1^2 \lambda \neq 0$$

$$\Psi(q): \quad -\lambda(x_0 x_2 - x_1^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x_0 x_2 - x_1^2 = 0}$$

c) $P(K^{3\times 1})$:
$$M := \left\{ K \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in K \right\} \cup \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Kegelschnitt}$$

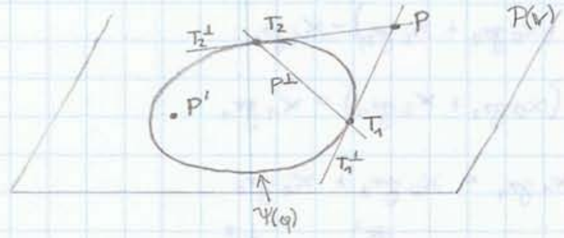
Punkte von M erfüllen Gleichung von $\Psi(q)$: $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$ (Parabel) und sind affin sichtbar. Der Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der einzige Fernpunkt und auch in M enthalten. $\Rightarrow$ M ist Kegelschnitt.



10.4.3) $\Psi(q) \neq \emptyset$ reg. Kegelschnitt, $\dim P(V) = 2$

Sei $P \in P(V) \setminus \Psi(q)$. P Außenpunkt von $\Psi(q)$ $\Leftrightarrow$ $P \in$ mind. 1 Tangente von $\Psi(q)$
sonst P Innenpunkt

a)



Sei $P \in P(V) \setminus \Psi(q)$.

1. Fall: $\exists T \in \Psi(q)$ mit $P \vee T$ ist Tangente, d.h. $P \in T^\perp$

$$\Rightarrow T \in P^\perp \Rightarrow \#(P^\perp \cap \Psi(q)) \geq 1$$

Ann.: T ist einziger Schnittpunkt, also

$$P^\perp \cap \Psi(q) = \{T\} \overset{10.4.8}{\Rightarrow} P^\perp \text{ Tangente} \Rightarrow P \in \Psi(q) \ \lightning$$

Da $P^\perp \not\subset \Psi(q)$ muss gelten: $\#(P^\perp \cap \Psi(q)) = 2$, also $P^\perp$ Bisekante

2. Fall: $\nexists T \in \Psi(q)$ mit $P \vee T$ ist Tangente

$$\Rightarrow T \notin P^\perp \ \forall T \in \Psi(q) \Rightarrow P^\perp \cap \Psi(q) = \emptyset$$

also $P^\perp$ Passante

b) $\# K = k < \infty$

Sei $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^3$. $\Rightarrow \exists$ genau k^3 Möglichkeiten.

$\in P(K^3)$ $\Rightarrow \exists$ nur $\dfrac{k^3 - \overset{NV}{1}}{\underbrace{k-1}_{\text{je } k-1 \text{ Vektoren gleich}}}$ Möglichkeiten.

$$\Rightarrow \# P(V) = k^2 + k + 1$$

lt. 10.4.1 a) gilt: Ein Kegelschnitt ist gleichmächtig zu einer Geraden.

Sei $g = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow \# g = \# \Psi(q) = \dfrac{k^2 - 1}{k-1} = k + 1$

$$\Rightarrow \#(P(V) \setminus \Psi(q)) = k^2$$

$\#(\Psi(q)) = k+1 \Rightarrow \exists\ k+1$ Tangenten $\Rightarrow \exists \binom{k+1}{2}$ Tangentenschnittpunkte $\hat{=}$ äußeren Pkten.

$\binom{k+1}{2} = \dfrac{(k+1)!}{2!(k-1)!} = \dfrac{1}{2} k(k+1) \ldots \#\{\text{äußere Pkte}\}$

$\#\{\text{innere Pkte}\} = k^2 - \#\{\text{äußere Pkte}\} = \dfrac{1}{2} k(k-1)$

c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{3\times 1}$, $q\left(\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_0 x_2 - x_1^2$

ZZ: $P := \mathbb{R}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ Innenpunkt $\Leftrightarrow p_0 p_2 - p_1^2 > 0$

$\sigma_q(P, X) = \frac{1}{2}(x_0 p_2 + x_2 p_0) - x_1 p_1$

$P \in X^\perp \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_0 p_2 + x_2 p_0) = x_1 p_1$

$\Leftrightarrow 2 x_1 p_1 = x_0 p_2 + x_2 p_0$

$x_2 = \frac{x_1^2}{x_0}$, $p_2 > \frac{p_1^2}{p_0}$ $\Leftrightarrow 2 x_1 p_1 > x_0 \frac{p_1^2}{p_0} + \frac{x_1^2}{x_0} p_0$

$\Leftrightarrow \quad 0 > x_0^2 p_1^2 + x_1^2 p_0^2 - 2 x_0 x_1 p_0 p_1 = (x_0 p_1 - x_1 p_0)^2$ $\lightning$

also $P \notin$ Tangente von $\Psi(q) \Rightarrow$ Innenpunkt

d) über $\mathbb{C}$ ist die Tangentengleichung immer lösbar.

10.5.2) $P(\mathbb{R}^{3\times 1})$, Kegelschnitt $\Psi(q)$: $q\left(\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$

a) ges.: $p = P^\perp$ zu $P = \mathbb{R}(1, 3, 4)^T$

$p = \varepsilon(p_a)$, da $p_1 = 1$

$\Phi(\lambda) = \varepsilon^{-1}(\Psi(q)) = x_1^2 + x_2^2 - 1$

$\Rightarrow p_a: x_1 p_1 + x_2 p_2 = 1$

$\Leftrightarrow 3x_1 + 4x_2 = 1$

$\Rightarrow p: 3x_1 + 4x_2 - x_0 = 0$

ges.: $p \cap \Psi(q) = \{S_1, S_2\}$

$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{1 - 4x_2}{3}\right)^2 + x_2^2 = 1$

$\vdots$

$\Rightarrow S_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 25 \\ -8\sqrt{6} + 3 \\ 6\sqrt{6} + 4 \end{pmatrix} \quad S_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 25 \\ 8\sqrt{6} + 3 \\ -6\sqrt{6} + 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Tangenten: $A_1 = P \vee S_1 \quad A_2 = P \vee S_2$

b)

$$f: \mathbb{V} \to \mathbb{V}: x \mapsto x - 2\frac{\sigma(p,x)}{\sigma(p,p)} p \qquad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

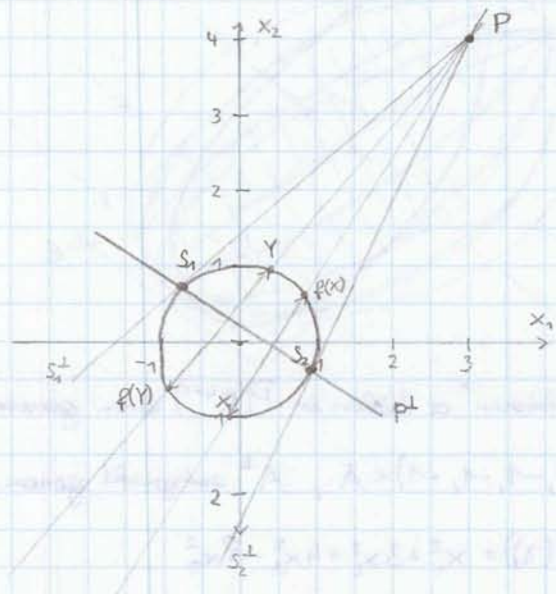
$$\sigma(p,x) = -x_0 p_0 + x_1 p_1 + x_2 p_2$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2\,\frac{-x_0 + 3x_1 + 4x_2}{24} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 13x_0 - 3x_1 - 4x_2 \\ 3x_0 + 3x_1 - 12x_2 \\ 4x_0 - 12x_1 - 4x_2 \end{pmatrix} =: \mathbb{R}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$-y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \quad \text{(lt. Maple)}$$

$$\Rightarrow q(x) = q(f(x)) \checkmark$$

c)



10.5.3) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{3\times1} \quad \lambda\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$

<u>ges.</u>: <u>Fernpunkt P</u> von $\Psi(q) := \overline{\Phi}(\lambda)$

$\in P(\mathbb{R}^{4\times1}) \to \Psi(q):\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_0^2 = 0$

Setze $x_0 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

$\Rightarrow$ z.B. $P = \mathbb{R}(0,1,0,1) \in \Psi(q)$

<u>ges.:</u> Gl. der <u>Tangentialebene $P^\perp$</u> durch P

$$P^\perp = \{ K x \in P(\mathbb{R}^{4\times1}) \mid \sigma(p, x) = 0 \}$$

$$\sigma(p, x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 - x_3 p_3 - x_0 p_0 = 0$$

$\Rightarrow x_1 - x_3 = 0 \ldots\ P^\perp \hat{=}$ Ebene

zz.: <u>$P^\perp \cap \Psi(q)$</u> $\hat{=}$ 2 Geraden

$P^\perp: x_1 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_3 \quad \Rightarrow \Psi(q): \cancel{x_1^2} + x_2^2 - \cancel{x_1^2} - x_0^2 = 0 \Leftrightarrow (x_2 - x_0)(x_2 + x_0) = 0$

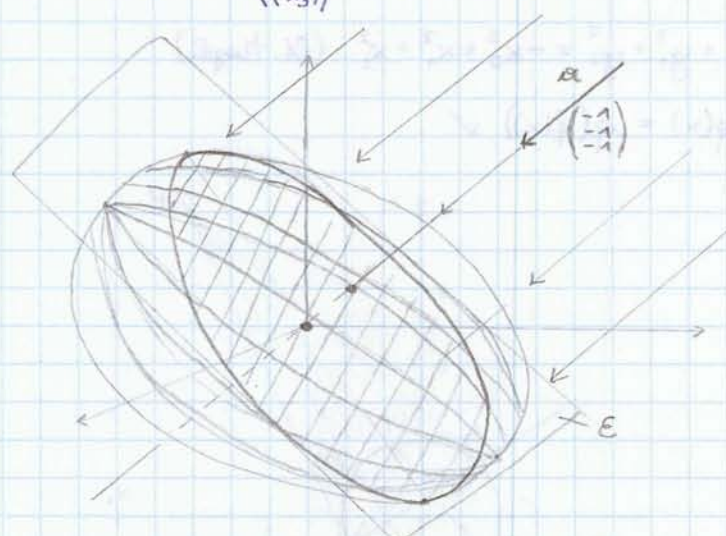
$$\Rightarrow g_1: \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_0 \end{cases} \qquad g_2: \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_0 \end{cases}$$

affiner Ausschnitt: $x_0 = 1$

$$\Rightarrow g_1, g_2 : \begin{cases} (x_2-1)(x_2+1) = 0 \Leftrightarrow x_2^2 = 1 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

also g_1, g_2 <u>parallel</u>

10.5.4) $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{3\times1}$ $\quad \Phi(\lambda)$: $\lambda\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 8$



a) Die „Lichtvektoren" a haben in $P(\mathbb{R}^{4\times1})$ einen gemeinsamen Schnittpunkt, nämlich $(0,-1,-1,-1) \times A$, $A^\perp$ entspricht genau der gesuchten Ebene $\mathcal{E}$.

$\Psi(q) = \varepsilon(\Phi(\lambda)) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_0^2$

$\Rightarrow \overset{\mathcal{E}=}{A^\perp}: -x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0$

b) $f: \mathbb{R}^{3\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1}: x \mapsto x - 2\,\dfrac{\sigma(a,x)}{\sigma(a,a)}\,a$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2\,\frac{-x_1 - 3x_2 - 4x_3}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{x_1 - 3x_2 - 4x_3}{8}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 - x_3 \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3 \\ -\frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 \end{pmatrix}$$

$f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, da $\sigma(a,x) = 0 \quad \forall x \in A^\perp = \mathcal{E}$

$f(\Phi(\lambda)) = \Phi(\lambda)$ lt. Angabe ✓

c) $p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{p} = f(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = p + \frac{1}{2}a$

$\Rightarrow$ p ist beleuchtet, da <u>entweder</u> p <u>oder</u> f(p) beleuchtet werden und p unter f durch a „hinunter"-verschoben wurde.

10.6.1) <u>pythagoräisches Quadrupel</u> (a, b, c, d) entspricht

ganzzahliger Lösung von $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

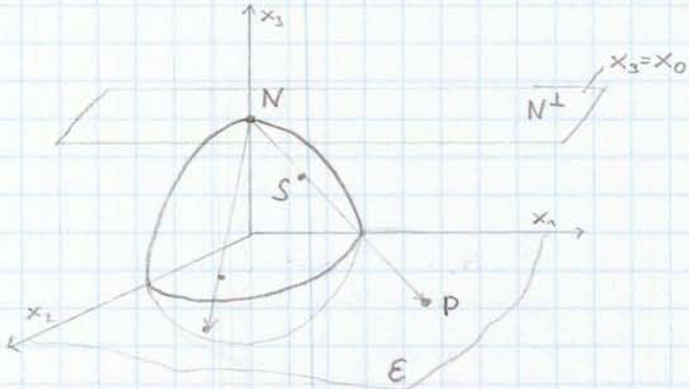
betrachte $\Psi(q) \subset P(\mathbb{Q}^{4\times 1})$ mit $q\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$\forall R \in P(\mathbb{Q}^{4\times 1})\ \exists k \in \mathbb{Q}$, sodass $P := k \cdot R = \begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$ teilerfremd

Sei $N = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \in \Psi(q)$ und $\mathcal{E}: x_3 = 0$

$\Rightarrow (N \vee \mathcal{E}) \cap \Psi(q)$ ist die Menge aller rationaler Quadrupel

Affiner Ausschnitt: $(x_0 = 0)$



$$N \vee P = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\0\end{pmatrix}\right] = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2 p_0\\ \lambda_2 p_1\\ \lambda_2 p_2\\ \lambda_1\end{pmatrix}$$

$(N \vee P) \cap \Psi(q)$:

$$\cancel{\lambda_1^2} + 2\lambda_1\lambda_2 p_0 + \lambda_2^2 p_0^2 = \lambda_2^2 p_1^2 + \lambda_2^2 p_2^2 + \cancel{\lambda_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2p_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = p_1^2 + p_2^2 - p_0^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{p_1^2 + p_2^2 - p_0^2}{2p_0}$$ (vgl. Doppelverhältnis)

$$\Rightarrow S := K\left((p_1^2 + p_2^2 - p_0^2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + 2p_0\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\0\end{pmatrix}\right) = K\begin{pmatrix}p_1^2 + p_2^2 + p_0^2\\ 2p_0p_1\\ 2p_0p_2\\ p_1^2 + p_2^2 - p_0^2\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}d\\a\\b\\c\end{pmatrix}$$ mit $p_0 < p_1 \leq p_2 \in \mathbb{Q}^+$

zB: $\pi^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\4\\6\\12\end{pmatrix}$ Probe: $14^2 = 4^2 + 6^2 + 12^2$

$196 = 16 + 36 + 144$ ✓