16.11.09

Differentialgleichungen UE

IV, 101, 107, 109, 113, 114, 118, 124

101) ges.: Trajektorien von $(xy^2+y)\,dx - x\,dy = 0$

entspricht Lösungskurven von $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{xy^2+y}{x} = y^2 + \frac{1}{x}y$ (Bernoulli) $\qquad x \neq 0$

Substitution: $z = y^{1-2} = y^{-1}$ $\qquad y \neq 0$

$\Rightarrow z' = -y^{-2}\cdot y' = -y^{-2}\left(y^2 + \frac{1}{x}y\right) = -\frac{1}{x}z - 1$ (lin. Gl.)

homogene Gl.:

$z' = \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}z \iff \int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x} + c$

$\iff \ln|z| = -\ln|x| + c$

$\iff z_h = c\cdot\frac{1}{x}$

Variation d. Konstanten:

$z_p = c(x)\cdot\frac{1}{x}$

$\Rightarrow z_p' = c'(x)\frac{1}{x} + \cancel{c(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \cancel{-\frac{1}{x}\left(c(x)\cdot\frac{1}{x}\right)} - 1$

$\iff c'(x) = -x$

$\Rightarrow c(x) = -\frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow z_p = -\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{x}{2}$

Gesamtlösung: $z = z_h + z_p = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{z} = \frac{2x}{2c - x^2}$ $\qquad 2c - x^2 \neq 0$

$\Rightarrow$ Lösungskurven:

$y = \frac{2x}{2c-x^2}$ auf $\begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } c < 0 \\ (-\infty, -\sqrt{2c}) \cup (-\sqrt{2c}, \sqrt{2c}) \cup (\sqrt{2c}, \infty) \end{cases}$

$y = 0$

107) ges.: 1. Integral von $y\,dx + x\,dy - xy \tan z\,dz = 0$. $\quad z \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

Gleichung nicht exakt, aber es gilt $\frac{\partial}{\partial y} y = 1 = \frac{\partial}{\partial x} x$.

$\Rightarrow$ Ansatz mit integrierendem Faktor $M(z)$.

$$M(z)\,y\,dx + M(z)\,x\,dy - xy\,M(z)\tan z\,dz = 0$$

Integrabilitätsbedingungen:

x, z: $\quad M'(z)\,y = -M(z)\,y \tan z$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{M'(z)}{M(z)} = -\tan z$$

$$\Rightarrow \quad \ln|M(z)| = -\int \frac{\sin z}{\cos z}\,dz = \ln|\cos z|$$

$$\Rightarrow \quad M(z) = \cos z$$

neue Gleichung: $y\cos z\,dx + x\cos z\,dy - xy\sin z\,dz = 0$ (exakt)

Bestimme Stammfkt. der Differentialform:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = y\cos z \quad \Rightarrow F(x,y,z) = xy\cos z + g_1(y,z)$$

Einsetzen liefert $g_1 = 0$, weitere Rechnung nicht notwendig.

$$\Rightarrow F(x,y,z) = xy\cos z + c$$

$\rightsquigarrow$ 1. Integral: $xy\cos z = c \quad (c \in \mathbb{R})$ $\quad z \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

109) Für welche Funktionen f führt die Bestimmung eines ersten Integrals von $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ auf eine exakte DGL?

äqu. System: $\dot{x} = y$
$\dot{y} = f(x,y)$

$\rightsquigarrow y\dot{y} = f(x,y)\dot{x}$, dh $f(x,y)\,dx - y\,dy = 0$.

DGL exakt, wenn $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-y) = 0$

also: $f(x, \dot{x})$ muss diffbar sein und darf nicht von $\dot{x}$ abhängen!

ges.: Trajektorien von $\ddot{x} = 1-3e^x$

$\Rightarrow (1-\overset{3}{\cancel{1}}e^x)\,dx - y\,dy = 0$ (exakt)

<u>Stammfunktion:</u>

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -y \Rightarrow F(x,y) = -\frac{1}{2}y^2 + g(x).$$

$$1-e^x = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x) \Rightarrow g(x) = x-3e^x + c$$

$$\Rightarrow F(x,y) = x-3e^x - \frac{1}{2}y^2 + c$$

Trajektorien genügen der Gleichung

$$\dot{x}^2 = 2(x-3e^x)+c \qquad (c > 2\ln 3+2),$$

die nach dem HS über impl. def. Fkt. überall auflösbar ist. Hinzu kommt der Punkt $(-\ln 3, 0)$ (entspricht $c = 2\ln 3+2$) – Funktionalmatrix dort 0)

Einschränkung von c wegen

$$\dot{x}^2 = f(x) \geq 0$$

$$f'(x) = 2-6e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\ln 3 \qquad (f''(-\ln 3) = -2, \text{ also Maximum})$$

$$f(-\ln 3) = 2(-\ln 3-1)+c \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 2\ln 3+2$$

113) $(ax+by+c)\,dx - (\alpha x+\beta y+\gamma)\,dy = 0$

DGL exakt, wenn gilt

$$\frac{\partial}{\partial y}(ax+by+c) = -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha x+\beta y+\gamma) \Leftrightarrow b = -\alpha.$$

Sei $b \neq -\alpha$. Existieren int. Faktoren der Gestalt $M(x)$, $M(y)$, $M(px+qy)$?

Ansatz $M(x)$:

$$\Rightarrow M(x)(ax+by+c)\,dx - M(x)(\alpha x+\beta y+\gamma)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(M(x)(ax+by+c)) + \frac{\partial}{\partial x}(M(x)(\alpha x+\beta y+\gamma)) = 0$$

$$\Leftrightarrow M(x)\,b + M'(x)(\alpha x+\beta y+\gamma) + M(x)\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{M'(x)}{M(x)} = -\frac{\alpha+b}{\alpha x+\beta y+\gamma}$$

Es gibt also keinen derartigen integrierenden Faktor, $M(y)$ analog.

Ansatz $M(px+qy)$:

$$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial y}\big(M(px+qy)(ax+by+c)\big)+\frac{\partial}{\partial x}\big(M(px+qy)(\alpha x+\beta y+\gamma)\big)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad M'(px+qy)q(ax+by+c)+M(px+qy)b+M'(px+qy)p(\alpha x+\beta y+\gamma) + M(px+qy)\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{M'}{M}(px+qy) = -\frac{\alpha+b}{q(ax+by+c)+p(\alpha x+\beta y+\gamma)}$$

$$= -\frac{\alpha+b}{(p\alpha+qa)x+(p\beta+qb)y+p\gamma+qc}$$

$M(px+qy)$ existiert, wenn Zähler darstellbar als $\varphi(px+qy)$.

$$\varphi(px+qy)=\lambda\cdot(px+qy)+c$$

Es gilt für λ ist EW von A, $(p,q)^T$ Eigenvektor zu λ:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & a\\ \beta & b\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda)=(\alpha-\lambda)(b-\lambda)-a\beta=\lambda^2-(\alpha+b)\lambda+(\alpha b-a\beta)=0$$

λ existiert genau dann, ~~wenn~~ wenn Diskriminante

$$(\alpha+b)^2-4(\alpha b-a\beta)=(\alpha-b)^2+4a\beta\geq 0.$$

Der Zähler ist unter obigen Voraussetzungen darstellbar als

$$(p,q)\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+p\gamma+qc = \lambda(p,q)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+p\gamma+qc.$$

Sei $u:=px+qy$, so folgt:

$$\frac{M'}{M}(u)=-\frac{\alpha+b}{\lambda u+p\gamma+qc}$$

$$\Rightarrow \ln|M(u)|=-(\alpha+b)\int\frac{du}{\lambda u+p\gamma+qc}=\left|\begin{matrix}\lambda u+p\gamma+qc=z\\ \lambda du=dz\end{matrix}\right|$$

$$=-\frac{\alpha+b}{\lambda}\int\frac{dz}{z}=-\frac{\alpha+b}{\lambda}\ln|\lambda u+p\gamma+qc|$$

$$\Rightarrow M(px+qy)=\big(\lambda(px+qy)+p\gamma+qc\big)^{-\frac{\alpha+b}{\lambda}}$$

114)

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{t+x+3}{-t+x+5} \iff (t+x+3)\,dt - (-t+x+5)\,dx = 0 \qquad -t+x+5 \neq 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = t+x+3 \Rightarrow F(t,x) = \tfrac{1}{2}t^2 + t(x+3) + g(x)$$

$$t - x - 5 = \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = t + \frac{\partial g}{\partial x}(x)$$

$$\iff \frac{\partial g}{\partial x}(x) = -x-5 \Rightarrow g(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 - 5x + c$$

$$\Rightarrow F(t,x) = \tfrac{1}{2}(t^2-x^2) + t(x+3) - 5x + c$$

implizite Darstellung der Trajektorien:

$$t^2 - x^2 + 2tx + 6t - 10x = c \qquad (-t+x+5 \neq 0)$$

Wegen $-t+x+5 \neq 0$ ist $dF \neq 0$ und die Gl. überall auflösbar.
~~Wegen $dF = (t+x+3,\ t-x-5) = (0,0)$ an $(t,x) =$~~

118)

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{t+3x+7}{2t+3x+5} \iff (t+3x+7)\,dt - (2t+3x+5)\,dx = 0$$

ges.: integrierender Faktor (analog Bsp. 113)

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$$

$$\iff \lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 3} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Eigenvektor zu $\lambda = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4-2\lambda & 2 \\ 6 & 6-2\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -(\sqrt{13}+1) & 2 \\ 6 & 1-\sqrt{13} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{13}-1}{2}$$

$$\to \begin{pmatrix} -(\sqrt{13}+1) & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\left(2t + (1+\sqrt{13})x\right) + 17 + 7\sqrt{13} \right)^{-\frac{10}{5+\sqrt{13}}}$$

124) ges.: orthogonale Trajektorien der Kurvenschar

$$y^2 = x^2\left(\tfrac{1}{2} - \ln x\right) + a \qquad (x > 0,\ a \geq -\tfrac{1}{2})$$

DGL der Schar erhält man aus

$$\begin{cases} y^2 - x^2\left(\tfrac{1}{2} - \ln x\right) = a \\ 2y\,dy - \left(2x\left(\tfrac{1}{2} - \ln x\right) - x^2 \tfrac{1}{x}\right)dx = 2y\,dy + 2x\ln x\,dx = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}y\,dy + \cancel{2}x\ln x\,dx = 0, \text{ d.h. } y\dot{y} + x\ln(x)\dot{x} = 0$$

<u>orthogonale Trajektorien:</u>

$$(\dot{x}, \dot{y}) \mapsto (-\dot{y}, \dot{x}): \qquad y\dot{x} - x\ln x\,\dot{y} = 0$$

$$(\dot{x}, \dot{y}) \mapsto (\dot{y}, -\dot{x}): \qquad -y\dot{x} + x\ln x\,\dot{y} = 0$$

d.h. $y\,dx - x\ln x\,dy = 0$. (nicht exakt!)

Ansatz: $M(x)$

$$M(x)\,y\,dx - M(x)\,x\ln x\,dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(M(x)y\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(M(x)x\ln x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad M(x) + M'(x)x\ln x + M(x)\ln x + M(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad M(x)(2 + \ln x) + M'(x)\,x\ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{M'(x)}{M(x)} = -\frac{2 + \ln x}{x\ln x} = -\frac{2}{x\ln x} - \frac{1}{x} \qquad x > 0,\ x \neq 1$$

$$\Rightarrow \quad \ln|M(x)| = -2\underbrace{\int\frac{dx}{x\ln x}} - \ln|x| = -2\ln|\ln x| - \ln|x|$$

$$= \left|\begin{matrix}\ln x = y \\ \tfrac{1}{x}dx = dy\end{matrix}\right| = \int\frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \quad M(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$$

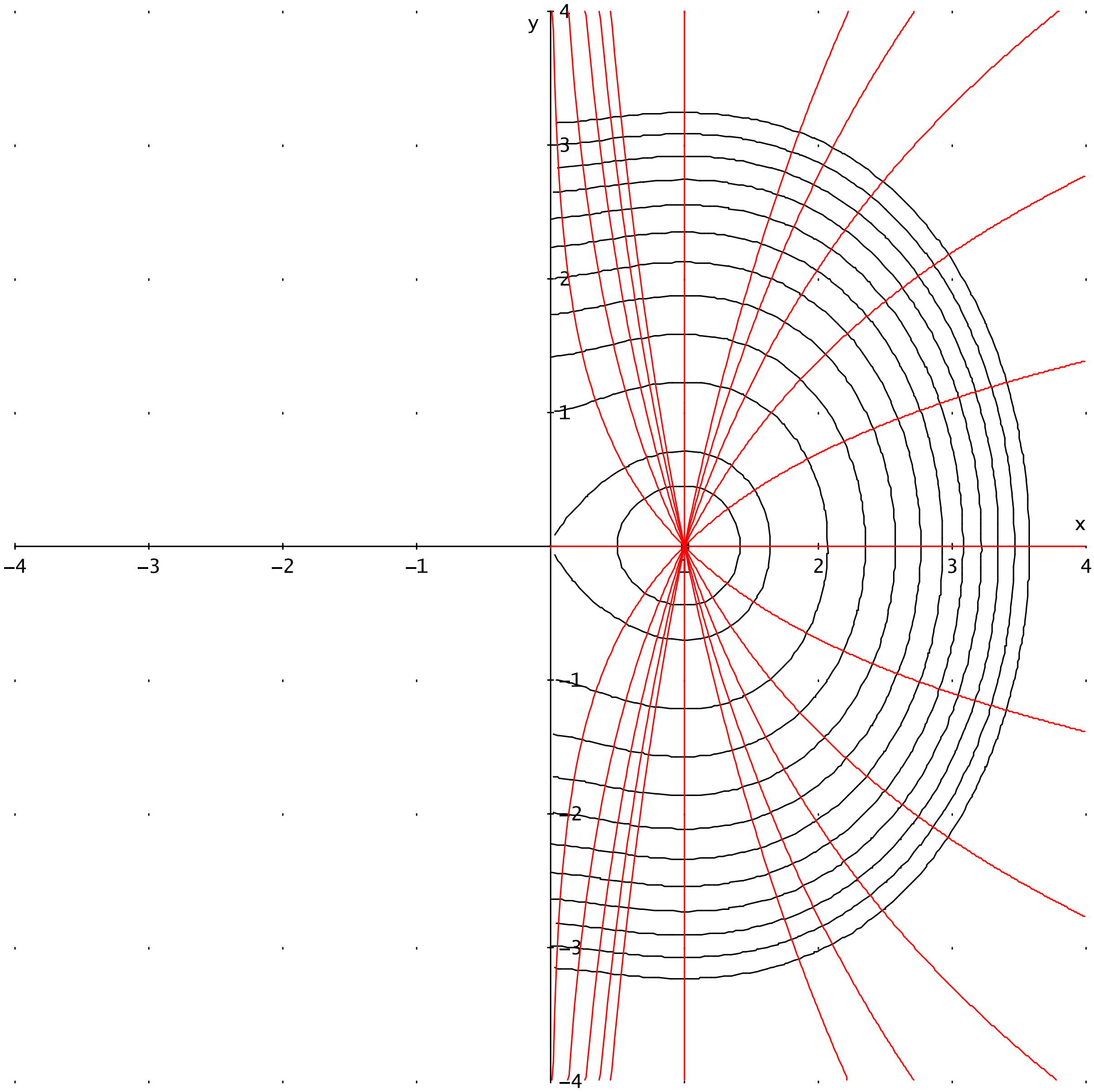
$\rightsquigarrow$ neue Gleichung: $\dfrac{y}{x\ln^2 x}\,dx - \dfrac{1}{\ln x}\,dy = 0$

$$\Rightarrow F(x,y) = -\frac{y}{\ln x} + c$$

$\Rightarrow$ ~~implizite~~ Darstellung der Trajektorien: $\dfrac{y}{\ln x} = c \Leftrightarrow y = c\cdot\ln x$ $(x \neq 1)$

bzw. $x = 1$.

sowie die Punkte $(c, 0)$, $c > 0$



y
x
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
2
3
4