Differentialgleichungen UE

II, 33, 36, 40, 45, 48, 52, 56

33) $x^{(k)} = \cosh t$

•) <u>allgemeine Lösung:</u>

$$x(t) = \underbrace{\int \cdots \int}_{k} \cosh t \underbrace{dt \cdots dt}$$

$$= \underbrace{\int \cdots \int}_{k-1} (\sinh t + c_{k-1})\, dt \cdots dt$$

$$= \underbrace{\int \cdots \int}_{k-2} (\cosh t + c_{k-1} t + c_{k-2})\, dt \cdots dt$$

$$= \ldots = \begin{cases} \cosh t + \sum_{i=0}^{k-1} c_i \frac{t^i}{i!} & k \text{ gerade} \\ \sinh t + \sum_{i=0}^{k-1} c_i \frac{t^i}{i!} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

•) <u>spezielle Lösung:</u> $k=4,\ x(0)=\dot{x}(0)=1,\ \ddot{x}(0)=0,\ x^{(3)}(0)=-1$

$$k=4 \Rightarrow x^{(j)}(t) = \begin{cases} \cosh t + \sum_{i=j}^{k-1} c_i \frac{t^{(i-j)}}{(i-j)!} & j \text{ gerade} \\ \sinh t + \text{—— " ——} & j \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{(j)}(0) = \begin{cases} 1 + c_j & j \text{ gerade} \\ c_j & j \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ c_3 = -1$$

also Lösung des AWP: $x(t) = \cosh t + t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}$

36) $\dot{x} = t^3 + x^2,\ x(0) = 1$ ges.: $\dot{\varphi}(0), \ddot{\varphi}(0), \varphi^{(3)}(0)$ ohne Bestimmung von φ.

$\Rightarrow \dot{\varphi}(0) = 0^3 + x(0)^2 = 1$

$\ddot{x} = 3t^2 + 2x\dot{x}$

$\Rightarrow \ddot{\varphi}(0) = 0 + 2 = 2$

$x^{(3)} = 6t + 2(\dot{x})^2 + 2x\ddot{x}$

$\Rightarrow \varphi^{(3)}(0) = 0 + 2 + 4 = 6$

Approximation von $\varphi(t)$ mit der Taylorformel:

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{3} \frac{\varphi^{n}(0)}{n!} t^n + \mathcal{O}(t^4)$$

$$= \varphi(0) + \dot{\varphi}(0) t + \frac{\ddot{\varphi}(0)}{2} t^2 + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{6} t^3 + \mathcal{O}(t^4)$$

$$= 1 + t + t^2 + t^3 + \mathcal{O}(t^4)$$

40) $\ddot{x} = x$ AW: a) $x(0) = \dot{x}(0) = 1$
b) $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$

äquivalentes System 1. Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

a) $x(0) = y(0) = 1$
b) $x(0) = 1$, $y(0) = -1$

Satz von Picard und Lindelöf:

$f(t, x, y) = (t, y, x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^3$

und erfüllt dort Lipschitzbedingung mit LK $\lambda = 1$.

$\Rightarrow$ Jedes AWP hat genau eine Lösung.

Man errät die Lösungen e^t, e^{-t}, sowie jede Lin.-Komb. d. Funktionen.

also: $x = Ae^t + Be^{-t}$
$y = \dot{x} = Ae^t - Be^{-t}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = A \cdot e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $A = 1$, $B = 0$

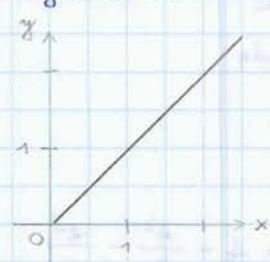
Lösung des Systems:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

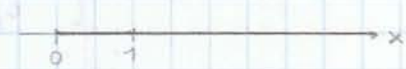
Lösung der Gleichung:

$x(t) = e^t$

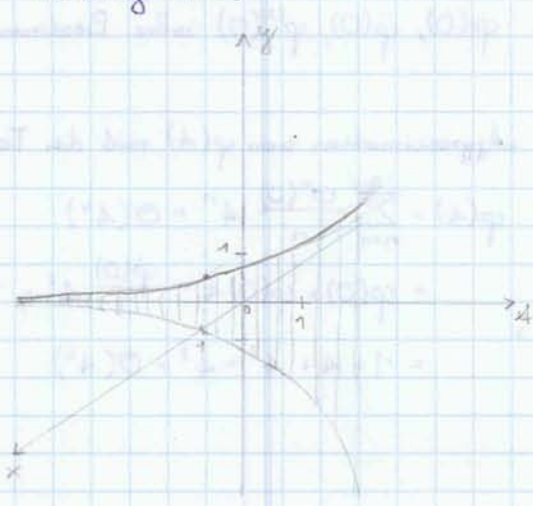
Trajektorie:



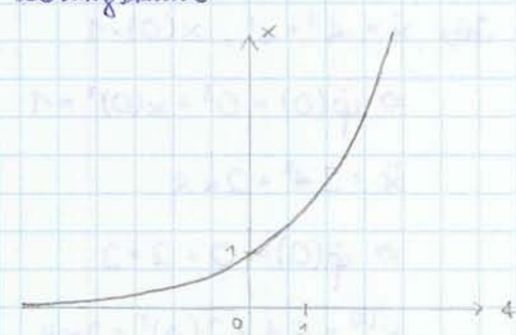
Trajektorie:



Lösungskurve:



Lösungskurve:



b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} A=0 \\ B=1 \end{matrix}$

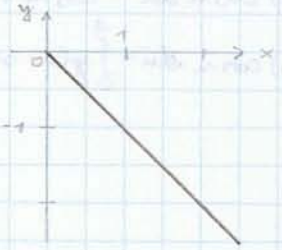
Lösung des Systems:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$

Lösung der Gleichung:

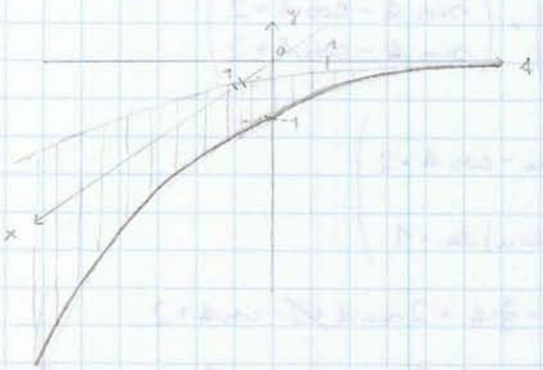
$x(t) = e^{-t}$

Trajektorie:

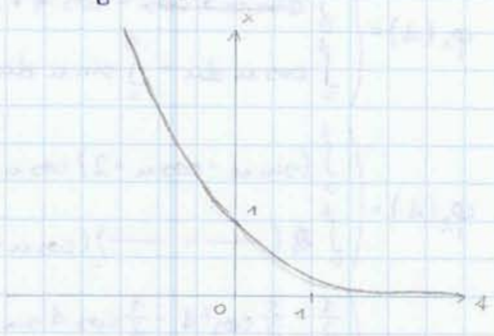


Trajektorie:

Lösungskurve:



Lösungskurve:



45) $\dot{x} = \sin t + y\cos t$ $\qquad (x,y)(0) = (1,1)$

$\dot{y} = x\cos t + y\sin t$

1. f stetig auf $\mathbb{R}^3$

2. $\| f(t,x,y) - f(t,\bar{x},\bar{y}) \| = \left\| \begin{matrix} \cos t\,(y-\bar{y}) \\ \cos t\,(x-\bar{x}) + \sin t\,(y-\bar{y}) \end{matrix} \right\|_{eukl.}$

$= \cos^2 t\,(y-\bar{y})^2 + \cos^2 t\,(x-\bar{x})^2 + 2\cos t \sin t\,(x-\bar{x})(y-\bar{y}) + \sin^2 t\,(y-\bar{y})^2$

$= \cos^2 t\,(x-\bar{x})^2 + 2\cos t\sin t\,(x-\bar{x})(y-\bar{y}) + (y-\bar{y})^2 \le \|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$

also: f erfüllt LB bzgl. (x,y) mit LK $\lambda = 1$

2. $g(x,y) := f(t,x,y)$, g stetig diffbar auf $\mathbb{R}^2$ mit beschr. Differential

$\Rightarrow \lambda = \sup_{[a,b]\times K_r(1,1)} \|dg\|_s \qquad \|dg\|_s = \sup_{\|(x,y)\|=1} \|dg(x,y)\| = \sup_{\|(x,y)\|=1} \left\| \begin{pmatrix} 0 & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$

$= \sup_{\|(x,y)\|=1} \left\| \begin{pmatrix} y\cos t \\ x\cos t + y\sin t \end{pmatrix} \right\| \le \sup_{\|(x,y)\|=1} \left\| \begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix} \right\|_{max} = 2$

also: f erfüllt LB bzgl. (x,y) mit LK $\lambda = 2$

Wegen $\lambda \cdot \max(-a, b) < 1 \Leftrightarrow \max(-a,b) < \frac{1}{2}$ und da r beliebig groß gewählt werden kann, sodass Bedingung 3 erfüllt ist, folgt, dass das Verfahren der sukzessiven Approximation ~~und~~ anwendbar ist für $[a,b] \subseteq (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

äquivalente Integralgleichung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \sin u + y(u)\cos u \, du + 1 \\ \int_0^t x(u)\cos u + y(u)\underbrace{t}_{\sin u} du + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t y(u)\cos u \, du - \cos t + 2 \\ \int_0^t x(u)\cos u \, du + \int_0^t y(u)\sin(u)\, du + 1 \end{pmatrix}$$

Sukzessive Approximation:

$$\varphi_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos u \, du \cancel{\sin u + \cos} - \cos t + 2 \\ \int_0^t \cos u \, du + \int_0^t \sin u \, du + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t - \cos t + 2 \\ \sin t - \cos t + 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t (\sin u - \cos u + 2)\cos u \, du - \cos t + 2 \\ \int_0^t (\text{—} \,''\, \text{—})(\cos u + \sin u)\, du + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2 t - \frac{1}{2}\cos t \sin t - \frac{1}{2}t + 2\sin t \cancel{+2} - \cos t + 2 \\ -\frac{1}{2}\cos t \sin t + \cancel{\frac{1}{2}t} - 2\cos t + 2 - \frac{1}{2}\cos t \sin t \cancel{- \frac{1}{2}t} + 2\sin t + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos^2 t - \cos t - \frac{1}{2}\cos t \sin t + 2\sin t + \frac{5}{2} \\ -2\cos t - \cos t \sin t + 2\sin t + 3 \end{pmatrix}$$

48) +52) $\ddot{x} - t\dot{x}^2 + x = 0$

äqu. GLS 1. Ordnung: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = ty^2 - x$ $\quad x(0) = 0$, $y(0) = 1$

1. f stetig auf $\mathbb{R}^3$
2. $g(x,y) := f(t,x,y)$

$$\|dg\|_s = \sup_{\|(x,y)\|=1} \|dg(x,y)\| = \sup_{\|(x,y)\|=1} \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2ty \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sup_{\|(x,y)\|=1} \left\| \begin{pmatrix} y \\ -x + 2ty^2 \end{pmatrix} \right\|_{max} = 1 + 2t$$

g stetig diffbar, beschränktes Differential $\Rightarrow \lambda = \sup_{[-a,a]\times \overline{K_r(0,1)}} \|dg\|_s = 1 + 2|a|$.

Wegen $\lambda \cdot a < 1$ muss $a < \frac{1}{2}$ sein, da $(1+2a)a < 1 \Leftrightarrow a^2 + \frac{a}{2} - \frac{1}{2} < 0$
$\Leftrightarrow -1 < a < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lambda = 2$.

3. Wegen $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{1+2r}) \to \frac{1}{2}$ für hinreichend großes r ist diese Bed. stets zu erfüllen.

Also: Verfahren konvergiert sicher für $[-a, a] \subseteq (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

äquivalente Integralgleichung:

$$\binom{x}{y}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t y(u)\, du \\ \int_0^t u\, y^2(u) - x(u)\, du + 1 \end{pmatrix}$$

Sukzessive Approximation:

$$\varphi_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t 1\, du \\ \int_0^t u\, du + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \left(\frac{u^2}{2} + 1\right) du \\ \int_0^t \underbrace{\left(u\left(\frac{u^2}{2}+1\right)^2 - u\right)}_{\frac{u^5}{4} + u^3} du + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6} + t \\ \frac{t^6}{24} + \frac{t^4}{4} \end{pmatrix}$$

Fehlerschätzung:

$$M(0, t, 0, 1) = \max_{[0,t]\times(0,1)} \|f\| = \max_{[0,t]} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \right\| = 1$$

$$\|\varphi(t) - \varphi_2(t)\| \leq \frac{\lambda^2 |t|^3}{6} e^{\lambda |t|} = \frac{2}{3} |t|^3 e^{2|t|} \qquad \forall t \in [-a, a] \subseteq (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \text{———} \text{"} \text{———} < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} e^1 = \frac{e}{12} \approx 0{,}2265\ldots$$

56) $\left.\begin{array}{l} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = c \end{array}\right\}$ erfülle Bed. des Satzes von Picard und Lindelöf.

$x = \varphi(t)$ ist Lösung, $\varphi_n(t)$ sukzessive Approx.-Lösungen.

Wissen: $\begin{cases} \varphi_0(t) = c \\ \varphi_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} f(u, \varphi_n(u))\, du + c \end{cases}$

$$\Rightarrow \varphi_n(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} f(u, \varphi_{n-1}(u))\, du + c = c = \varphi_0(t)$$

$$\dot{\varphi}_n(t_0) = f(t, \varphi_{n-1}(t)) \Rightarrow \dot{\varphi}_n(t_0) = f(t_0, \underbrace{\varphi_{n-1}(t_0)}_{c = x(t_0)}) = f(t_0, x(t_0)) = \dot{x}(t_0) = \dot{\varphi}(t_0)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n^{(n)}(t) = f^{(n-1)}(t, \varphi_{n-1}(t)) \Rightarrow \varphi_n^{(n)}(t_0) = f^{(n-1)}(t_0, \underbrace{\varphi_{n-1}(t_0)}_{x(t_0)}) = x^{(n)}(t_0) = \varphi^{(n)}(t_0)$$

Approximation mit der Taylor-Formel:

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi^{(i)}(t_0)}{i!} (t - t_0)^i + O(t^{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi_n^{(i)}(t_0)}{i!} (t - t_0)^i + O(t^{n+1})$$