1 Angabe

Es sei $S_0 := [0,1]$, das kompakte Einheitsintervall. Die Cantormenge S wird wie folgt konstruiert. Ist für $n \in I\!N \cup \{0\}$ eine Menge S_n gegeben, so entstehe S_{n+1} durch entfernen des mittleren Drittels jedes maximalen abgeschlossenen Teilintervalls von S_n. Danach sei $S := \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$.

Man zeige, daß S eine Lebesgue-Nullmenge ist.

2 Lösung

Beh 1: *Für jedes $n \in I\!N \cup \{0\}$ ist S_n die Vereinigung von 2^n Intervallen, jedes von der Länge $\frac{1}{3^n}$.*

Beweis durch vollständige Induktion. Für $n = 0$ ist es richtig. Danach erfülle S_n die Behauptung. Jedes der 2^n Intervalle ergibt nach Herausnehmen des Mitteldrittels 2 neue Intervalle der Länge $\frac{1}{3}\frac{1}{3^n}$, und insgesamt hat man dann $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ Intervalle.

Beh 2: *Sei $1 > \epsilon > 0$ und $n > \frac{-\ln \epsilon}{\ln 3 - \ln 2}$. Dann überdeckt die Menge der maximalen Teilintervalle von S_n die Cantormenge S und die Summe der Längen der Teilintervalle ist kleiner als ϵ.*

Da $S_{n+1} \subset S_n$ für alle $n \in I\!N \cup \{0\}$ lt. Konstruktion gilt, findet man $S \subset S_n$ für diese n. Die Gesamtsumme der Längen ist $2^n \times \frac{1}{3^n}$. Elementare Umformungen ergeben die Aussage über n und ϵ.

Daß S eine L-Nullmenge ist, folgt aus Behauptung 2, in der die Definition verifiziert wird.