1 Angabe

Man untersuche (mittels Konvergenzkriterien) für

$$f(x) := \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}$$

die Konvergenz von $\int_0^\infty f(x)\,dx$.

2 Lösung

Beh 1: *Der Integrand kann an $x = 0$ durch $f(0) := 0$ stetig ergänzt werden. Danach ist $f(x)$ auf jedem Intervall $[a, b] \subset [0, \infty)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ Riemann integrierbar.*

Da $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ (De L'Hospital), ist stetige Ergänzung in der angegebenen Weise möglich. Danach ist f auf jedem der angegebenen Intervall stetig, und somit R-integrierbar.

Beh 2: *Auf dem Intervall $[e, \infty)$ erfüllt der Integrand $f(x)$ die Abschätzung*

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Zunächst ergibt sich für einen Faktor des Integranden

$$\frac{x}{(x^2+1)^3} < \frac{1}{x^5}.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir in $[e, \infty)$

$$\ln x \leq x$$

zeigen können. Sei $\phi(x) := x - \ln x$. Es ist $\phi(e) = e - 1 > 0$. Weiters ist $\phi'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 1 - \frac{1}{e} > 0$, sodaß ϕ streng monoton wächst. Demnach gilt $\phi(x) > 0$ für alle $x \in [e, \infty)$ und somit die Behauptung.

Beh 3: *Das uneigentliche Integral $\int_e^\infty f(x)\,dx$ konvergiert und somit das Ausgangsintegral.*

Aus Beh.2 findet man, $|f(x)| \leq g(x) := \frac{1}{x^2}$ gilt, und da $\int_e^\infty \frac{1}{x^2}$ konvergiert, liegt eine konvergente Majorante vor.