1 Angabe

Man bestimme alle Häufungspunkte der Funktionenfolge $\{f_n\}$ mit $f_n(x) := x^n$ bezüglich der Integralnorm $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,dx$ in $C[0,1]$ als auch der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ in $B[0,1]$.

2 Lösung

Beh 1: *Die Folge $\{f_n\}$ hat den einzigen HP $f = 0$ in $C[0,1]$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$.*

BW: Da die Nullfunktion $f = 0$ die Ungleichung

$$\|f_n - 0\|_1 = \frac{1}{n+1}$$

für alle $n \in I\!N$ erfüllt, konvergiert die Folge f_n gegen $f = 0$. Somit ist $f = 0$ HP. Da $C[0,1]$ ein Hausdorffraum ist, muß jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert konvergieren, also gibt es keine weiteren Häufungspunkte.

Beh 2: *Die Folge $\{f_n\}$ hat keine HP in $B[0,1]$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$.*

BW: Sei f ein HP, $1 > \epsilon > 0$ beliebig und $\{f_{n_k}\}$ eine gegen einen HP f konvergente Teilfolge. Da alle f_n stetig sind, müßte f selbst stetig sein. Sei $\epsilon > 0$ und N derart, daß

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| < \epsilon$$

für alle $x \in [0,1]$ gilt. Dann ist

$$|f(x)| \leq x^{n_k} + \epsilon,$$

woraus man auf $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1)$ schliessen kann (bitte genau überlegen). Aus der Stetigkeit von f schließt man auf $f(1) = 0$. Dann ist

$$1 > \epsilon \geq \|f - x^{n_k}\|_\infty = \|x^{n_k}\|_\infty = 1,$$

ein Widerspruch.

3 Ein interessantes "Missverständnis" von 173

Aufgabe: Sei $f \in B[0,1]$ und $f_n(x) := (f(x))^n$ für $x \in [0,1]$. Man bestimme alle HP der Folge $\{f_n\}$ bezüglich der Sup-Norm.

Ergebnis: Ist $\|f\|_\infty > 1$, so hat die Folge keine HP. Falls $+1$ oder -1 ein HP einer Folge $\{f(x_n)\}$ mit $|f(x_n)| < 1$ ist, so gibt es auch keinen HP. Andernfalls konvergiert die Folge gegen die folgende Funktion g:

$$g(x) := \begin{cases} -1 & x \in f^{-1}(-1) \\ 0 & x \in f^{-1}((-1,1)) \\ 1 & x \in f^{-1}(1). \end{cases}$$