1 Angabe

Es sei $S_0 := [0,1]$, das kompakte Einheitsintervall. Die Cantormenge S wird wie folgt konstruiert. Ist für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine Menge S_n gegeben, so entstehe S_{n+1} durch Entfernen des mittleren Drittels jedes maximalen abgeschlossenen Teilintervalls von S_n. Danach sei $S := \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$.

Man zeige, daß S nicht abzählbar ist. (Hinweis: zeigen Sie zuerst, daß alle Zahlen der Gestalt $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$ mit $j \in \{0,2\}$ zu S gehören.

2 Lösung

Die angegebene Anleitung läßt spiegelt folgende Idee wieder: Es werden von S_0 ausgehend, rekursiv die maximalen Intervalle von S_n mittels binär dargestellter ganzer Zahlen numeriert:

S_0 als Induktionsanfang. Dann seien $S_{b_1 \ldots b_k}$ die 2^k Teilintervalle nach dem k.ten Schritt, so behaupten wir, daß

$$S_{b_1 \ldots b_k} = \left[\sum_{j=1}^{k} (2b_j) 3^{-j}, \sum_{j=1}^{k} (2b_j) 3^{-j} + \frac{1}{3^k} \right].$$

Dies sieht man durch vollständige Induktion sofort ein.

(Es mag nützlich erscheinen, sich einen Baum mit Wurzel S_0 und sukkzessiv binär sich verzweigender Struktur zu zeichnen!)

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gehört

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{3^j} \qquad \text{mit} \qquad j \in \{0,2\} \qquad (*)$$

zu S, da jeder solche Punkt Randpunkt eines Intervalls $S_{\frac{a_1}{2} \ldots \frac{a_N}{2}}$ ist, und beim Entfernen von Mitteldritteln diese Randpunkte niemals aus S_0 herausgenommen werden.

Offenkundig erweisen sich nun alle Zahlen aus der Anleitung als Grenzwerte von Zahlen der Form $(*)$, und da S abgeschlossen ist (als Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen S_n), gehören sie zu S.

Um nun die Überabzählbarkeit von S zu beweisen, genügt es festzustellen, daß $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ nicht abzählbar ist, und nachzuweisen, daß

$$(b_1, b_2, \ldots) \mapsto \frac{2b_1}{3} + \frac{2b_2}{3^2} + \ldots$$

injektiv ist. D.h., wir müssen zeigen, daß

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2b_j}{3^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2b'_j}{3^j}$$

für alle $b_j, b'_j \in \{0,1\}$ die Gleichungen $b_j = b'_j$ für alle $j \in I\!N$ nach sich zieht. Es sei $j_0 := \min\{j \mid b_j \neq b'_j\}$. O.B.d.A. können wir $b_{j_0} = 0$ und $b'_{j_0} = 1$ annehmen. Dann ist, wenn man $x := \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{2b_j}{3^j}$ setzt,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2b_j}{3^j} \leq x + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} = x + \frac{2}{3^{j_0+1}} \frac{3}{2} = x + \frac{1}{3^{j_0}}.$$

Andererseits ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2b'_j}{3^j} \geq x + \frac{2}{3^{j_0}},$$

ein Widerspruch. Also ist die Abbildung injektiv.