1 Angabe

Man zeige die Vollständigkeit von $A_2 = l_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \mathbf{x_k^2} < \infty\}$ in der l_2-Norm, gegeben durch

$$\|\mathbf{x}\| := \left(\sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \mathbf{x_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2 Lösung

Sei $\{\mathbf{x}_k \mid k \in I\!N\}$ eine Cauchyfolge in l_2. Man macht sich klar daß jedes $\mathbf{x}_k = \{x_{kn} \mid n \in I\!N\}$ selbst eine Folge reeller Zahlen darstellt.

Beh 1: *Es gibt eine Folge $\mathbf{x} = \{x_n \mid n \in I\!N\}$ sodaß für alle $n \in I\!N$ die Folge x_{kn} bei $k \to \infty$ gegen x_n strebt.*

Bew: Für alle $n \in I\!N$ hat man $|x_{kn} - x_{ln}| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\|$, sodaß bei festem n die Zahlen x_{kn} eine reelle Cauchyfolge bilden. Wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen gilt die Behauptung.

Beh 2: *Die Folge $\mathbf{x}$ gehört zu l_2.*

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Da die $\mathbf{x}_k$ eine Cauchyfolge bilden, gibt es ein N, derart daß für $k \geq N$ stets

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_N\| < \varepsilon$$

gilt. Anwendung der Dreiecksungleichung (in der Form $\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|$) ergibt hieraus

$$\|\mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{x}_N\| + \varepsilon.$$

Diese Abschätzung gilt für alle $k \geq N$ und impliziert die Existenz einer Konstanten $C \geq 0$ mit

$$\|\mathbf{x}_k\| \leq C$$

für alle $k \in I\!N$. Sei nun $M \in I\!N$ beliebig, dann hat man

$$\sum_{n=1}^{M} x_{kn}^2 \leq C^2,$$

woraus bei $k \to \infty$ die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{M} x_n^2 \leq C^2$$

resultiert. Da M beliebig ist, ergibt sich $\mathbf{x} \in l_2$.

Beh 3: *Die Folge* $\mathbf{x}_k$ *konvergiert in* l_2 *gegen* $\mathbf{x}$*.*

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ und N derart, daß

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $l, k \geq N$ gilt.
Da $\mathbf{x} \in l_2$ gibt es ein $M \in I\!N$ sodaß sowohl

$$\left(\sum_{n \geq M} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{6}$$

als auch

$$\left(\sum_{n \geq M} x_{Nn}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{6}$$

gilt.
Da jede der Folgen $x_{kn} \to x_n$ erfüllt, gibt es ein $L \in I\!N$ mit $L \geq N$ derart daß für alle $k \geq L$ stets

$$|x_{kn} - x_n| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

gilt.
Nun setzt man (für $k \geq L$) alles 'geschickt' zusammen:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_L\| + \|\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_k\| \\
&\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_L\| + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{M} |x_{Ln} - x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=M}^{\infty} |x_{Ln}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=M}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{M} |x_{Ln} - x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{M} |x_{Ln} - x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\varepsilon}{3} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{M} \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$