1 Angabe

$f : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *wesentlich beschränkt*, falls es eine Nullmenge $X \subseteq (a,b)$ und eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\forall x \in (a,b) \setminus X : \quad |f(x)| \leq \alpha.$$

In Abweichung von der Bezeichnung in der Übung sei $\|f\|_\infty$ als Infinimum der Zahlen α dieser Art bezeichnet. Man zeige, die Menge $L^\infty(a,b)$ der auf (a,b) wesentlich beschränkten Funktionen einen linearen Raum bilden, und $\|\cdot\|_\infty$ eine Halbnorm darstellt. Wann sind 2 Funktionen äquivalent modulo dem Kern dieser Halbnorm?

2 Lösung

Zunächst eine kleine Fleißaufgabe:

Beh 1: *Das Infimum existiert und ist sogar ein Minimum.*

Lt. Definition existiert das Infimum für jedes $f \in L^\infty(a,b)$. Sei $\{\alpha_n\}$ eine streng gegen $\|f\|_\infty$ monoton fallende Folge und $\{X_n\}$ die Folge von Nullmengen, welche man jeweils aus (a,b) entfernen muß, damit $|f|$ auf $(a,b) \setminus X_n$ durch α_n beschränkt ist. Sei $X := \bigcup_{n=1}^\infty X_n$, so ist $|f|$ auf $(a,b) \setminus X$ durch $\|f\|_\infty$ beschränkt. Eine kleinere Schranke kann auf diese Weise nicht gefunden werden, somit wird für $\alpha := \|f\|_\infty$ tatsächlich das Infimum angenommen, und ist daher das Minimum.

Beh 2: *Die Summe zweier essentiell beschränkter Funktionen f und g ist essentiell beschränkt, und es gilt $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.*

Seien $X, Y \subseteq (a,b)$ Nullmengen, derart daß $|f(x)| \leq \alpha$ für alle $x \in (a,b) \setminus X$ und $|g(x)| \leq \beta$ für alle $y \in (a,b) \setminus Y$ gilt. Setzt man $Z := X \cup Y$, so hat man eine Nullmenge, auf deren Komplement

$$|f(x) + g(x)| \leq \alpha + \beta$$

gilt. Somit ist $f + g \in L^\infty(a,b)$. Aus der Ungleichung folgt auch für alle α und β, welche wesentliche Schranken von f bzw. g sind, daß

$$\|f+g\|_\infty \leq \alpha + \beta$$

gilt. Rechts zu den Infima übergehend, ergibt sich die Dreiecksungleichung.

Beh 3: *Der Kern von $\|\cdot\|_\infty$ besteht aus allen Funktionen, welche außerhalb einer Nullmenge verschwinden.*

Sichtlich ist jede solche Funktion im Kern. Andererseits, wenn f im Kern ist, heißt das, daß nach Entfernen einer Nullmenge, ihr Betrag durch die Zahl Null (siehe Beh.1) beschränkt ist, also außerhalb dieser Nullmenge verschwindet.

Anmerkung: Für jede stetige Funktion f stimmt $\|f\|_\infty$ mit der Supremumsnorm überein.