1 Angabe

Für $f(x) := (x^2 + y)\ln|x - 2y^2|$ bestimme man $D(f)$ und setze f auf einen möglichst großen Bereich stetig fort.

2 Lösung

Beh 1: $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y^2 \neq 0\}$.

BW.: Nur für Punkte (x, y) mit $x = 2y^2$ ist das Argument vom Logarithmus Null.

Beh 2: *Falls der GW für* $(x, y) \to (x_0, y_0)$ *mit* $x_0 = 2y_0^2$ *existiert, so ist* $(x_0, y_0) \in A := \{(0, 0), (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}})\}$.

BW.: Es sei $g(x, y) := x^2 + y$, so gilt für alle $(x_0, y_0) \notin A$, daß $g(x_0, y_0) = 4y_0^4 + y_0 \neq 0$. Falls also f an (x_0, y_0) stetig fortsetzbar ist, so auch

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \ln|y - x^2|,$$

ein Widerspruch.

Beh 3: *An der Stelle* $(0, 0)$ *kann* f *nicht stetig fortgesetzt werden.*

BW.: Angenommen doch. Es seien $a, b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so wird durch $t \mapsto F(t) := (a(t), b(t))$ eine stetige Funktion von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}^2$ definiert. Falls $F(t) \in D(f)$, und $\lim_{t\to 0}(a(t), b(t)) = (0, 0)$ gilt, muß $B := \lim_{t\to 0} f(a(t), b(t))$ existieren und als stetige Ergänzung an $(0, 0)$ muß dann $f(0, 0) = B$ gesetzt werden. Wählt man $(a(t), b(t)) := (t, 0)$, so ergibt sich

$$f(a(t), b(t)) = \cdots = t^2 \ln t,$$

sodaß man $B = 0$ findet. Nun wählen wir $a(t) := 2t^2 + e^{-t}$ und $b(t) = t$. Anwendung der Regel von De L'Hospital zeigt $a(0^+) = 0$. Weiters ergibt sich

$$f(a(t), b(t)) = \ldots = -(4t^3 + \frac{e^{-\frac{2}{t}}}{t} + 4e^{-\frac{1}{t}}t + 1),$$

ein Ausdruck, der bei $t \to 0^+$ gegen -1 strebt, sodaß sich $B = -1$ ergibt, ein Widerspruch, weil man jetzt $f(0, 0) = -1$ setzen müßte.

Beh 4: f *kann an* $P(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$ *nicht stetig fortgesetzt werden.*

BW.: Zunächst macht man sich klar, daß f an P stetig fortsetzbar genau dann ist, wenn $g(x, y) := f(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + x, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + y) = (x^2 + y + x\sqrt[3]{4})\ln|x - 2y^2 + y\sqrt[3]{16}|$ an $P'(0, 0)$ stetig fortsetzbar ist. Danach argumentiert man recht ähnlich wie im BW von Beh.3 (bitte selber nachdenken!).