# 1 Angabe

Man bestimme eine Stammfunktion zu $f(x) := \frac{1}{b\cos x + a\sin x}$.

(Anleitung: man suche eine geeignete Substitution durch Einführen von Hilfsvariablen $A, \alpha$, wobei $a := A\cos(\alpha)$ und $b := A\sin(\alpha)$ gelte.)

# 2 Lösung

Vorbemerkungen.

1. Der Integrand hat (in Abhängigkeit von den Werten $a$ und $b$) Polstellen. Deshalb ist $D(f)$ möglicherweise Vereinigung disjunkter offener Intervalle und es muß für jedes solche Intervall eine eigene Integrationskonstante vorgesehen werden.

2. Zunächst stellt sich die Frage, ob man die obigen Hilfsvariablen überhaupt einführen kann. Um dies einzusehen, faßt man $P(a, b)$ als Punkt in der Ebene auf und betrachtet $A := \sqrt{a^2 + b^2}$, sowie den Winkel $\alpha$, welchen der Vektor $\vec{OP}$ mit der Abszisse einschließt. Dann gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{A}, \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{A}.$$

   Hiedurch ist $\alpha$ bis auf Vielfache von $2\pi$ eindeutig bestimmt.

Das Ausführen der Integration und Einsetzen von $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ führen ohne Probleme auf eine Stammfunktion

$$F(x) := \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{A + a\cos(x) - b\sin(x)}{A - a\cos(x) + b\sin(x)} \right|$$

von $f$ welche für all $x$ mit

$$x \neq k\pi - \alpha$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$ definiert ist (dies ist, wie man sich leicht überlegt, auch gleich $D(f)$). Jede Stammfunktion $G$ von $f$ läßt sich mittels $F$ und einer beliebigen Folge $\{c_k\}$ reeller Zahlen unter Beützung der Bezeichnung $J_k := (k\pi - \alpha, (k+1)\pi - \alpha)$ wie folgt eindeutig festlegen:

$$G(x) = F(x) + c_k \qquad \forall x \in J_k.$$