1 Angabe

Man zeige durch ein Gegenbeispiel, daß der Vektorraum $C[a, b]$ der auf $[a, b]$ stetigen Funktionen bezüglich der Integralnorm

$$\|f\| := \int_a^b |f|$$

nicht vollständig ist. Dabei sei $a < b$.

2 Lösung

Es genügt, a und b und eine Cauchyfolge $\{f_n\}$ anzugeben, die in $C[a, b]$ nicht konvergiert. Wir wählen $a = -1$ und $b = 1$. Danach sei

$$f_n(t) := t^{\frac{1}{2n+1}}.$$

Elementare Rechnung ergibt für $n \leq m$

$$\|f_n - f_m\| = 2(\frac{2m+1}{2m+2} - \frac{2n+1}{2n+2}).$$

Hieraus ergibt sich, daß die f_n eine Cauchyfolge bilden. Es ist nicht schwierig festzustellen, daß die Konvergenz von f_n gegen eine stetige Funktion f unmittelbar $f(x) = 1$ für $x \in (0, 1]$ und $f(x) = -1$ für $x \in [-1, 0)$ nach sich zieht. Die Funktion kann bei 0 nicht stetig ergänzt werden. Also kann die angegebene Folge nicht in $C[-1, 1]$ bezüglich der Integralnorm konvergieren.

ps: Eine Skizze der Funktionen macht verständlich, wie man auf das Gegenbeispiel kommt. Die Integralnorm hat nämlich eine einfache geometrische Deutung!