1 Angabe

Man zeige, daß die Einschränkung von f, gegeben durch $f(x,y) := \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ falls $x^2+y^2>0$ und $f(0,0):=0$, auf jede Gerade durch den Ursprung stetig, jedoch an $P(0,0)$ unstetig ist.

2 Lösung

Zunächst sollte man wissen, daß eine Gerade G durch den Ursprung ein 1-dimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^2$ ist. Es gibt somit a,b mit $a^2+b^2>0$, sodaß

$$G = G_{a,b} = \{(x,y) \mid ax+by=0\}.$$

Beh 1: *Ist $ab \neq 0$, so gilt für alle $(x,y) \in G_{a,b}$ die Abschätzung*

$$|f(x,y)| \leq |x|\frac{|b|}{|a|}.$$

Ist $ab=0$, so ist $f(x,y)=0$. f ist bei Einschränkung auf $G_{a,b}$ stetig.

BW.: Im ersten Fall ist

$$f(x,y) = f(x,-\frac{b}{a}) = -\frac{a}{b}\frac{x}{x^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2},$$

woraus sich die Abschätzung sofort ergibt (im wesentlichen Weglassen von x^2 im zweiten Nenner). Der zweite Fall ergibt sich durch Einsetzen. Nun ergibt sich die Stetigkeit in beiden Fällen aus der Abschätzung durch eine Funktion, die bei $(x,y)\to(0,0)$ nach Null strebt.

Beh 2: *f ist an $P(0,0)$ nicht stetig.*

BW.: Angenommen doch. Dann ist die Einschränkung von f auf

$$A := \{(x,y) \mid y = x^2\}$$

stetig. Tatsächlich stimmt f entlang $A\setminus\{(0,0)\}$ mit der konstanten Funktion $\frac{1}{2}$ überein. Somit ergibt sich $0 = f(0,0) = \frac{1}{2}$, ein WS.