1 Angabe

Es sei $f(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^3(x)\cos^5(x)}}$. Man transformiere $\int f(x)\,d(x)$ in ein unbestimmtes Integral mit rationalem Integranden.

2 Lösung

Beh 1: *Der Definitionsbereich $D(f)$ von f ist $\bigcup_{z\in\mathbb{Z}}(z\pi, z\pi+\frac{\pi}{2})$.*

Es muß $\sin(x)$ und $\cos(x)$ das selbe Vorzeichen ungleich Null haben. Nun zeichnet man sich am einfachsten die Funktionen auf (Einheitskreis oder die Graphen).

Beh 2: *Die Substitution $u := \tan x$ führt das Integral in $\int u^{-3/4} du$ über*

Zunächst bemerken wir, daß $\tan x > 0$ auf $D(f)$ gilt. Deshalb sind folgende Formeln zu beachten:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{\operatorname{sign}(\sin(x))u}{\sqrt{1+u^2}}\\ \cos x &= \frac{\operatorname{sign}(\sin(x))}{\sqrt{1+u^2}}.\end{aligned}$$

Einsetzen und sorgfältiges Rechnen ergeben die Behauptung (glücklicherweise kürzen sich die Vorzeichen weg).

Schlußendlich führt die Substitution $u = t^4$ auf einen rationalen Integranden in t, nämlich die konstante Funktion $g(t) = 4$. Noch ein Wort zu etwaigen Vorzeichen:

Da $u = \tan x$, wie früher bemerkt, positiv ist, ist $u^{3/4} = t^3$ korrekt.