1 Angabe

Man beweise: Ist f eine auf $I := [a, b]$ stetige Funktion und $\{g_n\}$ eine auf I punktweise gegen g konvergente Folge von Funktionen mit beschränkter Schwankung, für welche die Folge $\{V_a^b(f_n)\}$ beschränkt ist, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dg_n = \int_a^b f\, dg.$$

Hinweis: Beispiel 129 verwenden.

2 Lösung

Wenn $\mathcal{Z} := \{a = t_0, \ldots, t_{p(\mathcal{Z})} = b\}$ eine Zerlegung von I ist, so werde mit

$$\rho(f, \mathcal{Z}) := \max_{i\in\{1,\ldots,p(\mathcal{Z})\}} \left(sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) - \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) \right)$$

gesetzt.

Beh 1: *g hat auf I beschränkte Totalvariation.*

Es sei M eine Schranke der Folge der Totalvariationen der g_n und $\mathcal{Z}$ eine beliebige Zerlegung von I in $p := p(\mathcal{Z})$ Teilintervalle. Sei $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann kann wegen der punktweisen Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$ so groß gefunden werden, daß

$$(\forall n \geq N)\ (\forall i = 1, \ldots, p): \quad |g_n(t_i) - g(t_i)| < \frac{\epsilon}{p}.$$

Nun ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} |g(t_i) - g(t_{i-1}| \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{p} |g(t_i) - g_n(t_i)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p} |g_n(t_i) - g_n(t_{i-1})| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p} |g_n(t_{i-1}) - g(t_{i-1}) \\
&\leq \quad \epsilon + M + \epsilon,
\end{aligned}$$

eine Schranke, die für alle Zerlegungen dieser Form gültig ist. Somit gilt die Behauptung.

Beh 2: *Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sodaß für alle $n \geq N$ stets*

$$\left| \int_a^b f\, dg - \int_a^b f\, dg_n \right| < \epsilon$$

gilt.

Auf dem kompakten Intervall I ist f gleichmäßig stetig. Deshalb gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit

$$\rho(f, \mathcal{Z})C < \frac{\epsilon}{4}.$$

Hieraus und Beispiel 129 ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|f\, dg - \sigma(f, \mathcal{Z}, B, g)| \leq \rho(f, Z)C < \frac{\epsilon}{4} \tag{1}$$

$$|f\, dg_n - \sigma(f, \mathcal{Z}, B, g_n)| \leq \rho(f, Z)C < \frac{\epsilon}{4}. \tag{2}$$

Nun wähle man $N \in \mathbb{N}$ derart daß

$$(\forall n \geq N) \quad (\forall i \in \{1, \dots p\}): \qquad |g(b_i) - g_n(b_i)| < \frac{\epsilon}{2p}.$$

Dann ist für $n \geq N$ stets

$$|\sigma(f, \mathcal{Z}, B, g) - \sigma(f, \mathcal{Z}, B, g_n)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt die Behauptung.