# 1 Angabe

Es sei auf $M := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (Raum der reellen Zahlenfolgen) für $\{x_n\} \neq \{y_n\}$ durch $d(\{x_n\},\{y_n\}) := \frac{1}{\min\{k|x_k \neq y_k\}}$ und für $\{x_n\} = \{y_n\}$ durch $d(\{x_n\},\{x_n\}) := 0$ eine Funktion gegeben. Man zeige, daß $d$ eine Metrik ist.

# 2 Lösung

**Beh 1:** *$d(\{x_n\},\{y_n\}) = 0$ genau dann, wenn $\{x_n\} = \{y_n\}$.*

BW: Aus $\{x_n\} = \{y_n\}$ folgt sichtlich $d(\{x_n\},\{y_n\}) = 0$. Nun ist noch zu zeigen, daß $d(\{x_n\},\{y_n\}) \neq 0$ impliziert daß $d(\{x_n\},\{y_n\}) \neq 0$. Tatsächlich ist laut Definition in diesem Fall $d(\{x_n\},\{y_n\}) = \frac{1}{\min\{k|x_k \neq y_k\}}$, und daher nicht Null.

**Beh 2:** *$d(\{x_n\},\{y_n\}) = d(\{x_n\},\{y_n\})$ für alle $\{x_n\},\{y_n\} \in M$.*

BW: Wenn $\{x_n\} = \{y_n\}$, so ist $d(\{x_n\},\{y_n\}) = 0 = d(\{x_n\},\{y_n\})$. Im anderen Fall folgt die Symmetrie aus der Tatsache, daß $\min\{k \mid x_k \neq y_k\} = \min\{k \mid y_k \neq x_k\}$.

**Beh 3:** *Es gilt für alle $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ die Dreiecksungleichung.*

Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, es gibt ein Tripel $(\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\})$ mit $d(\{x_n\},\{y_n\}) > d(\{x_n\},\{z_n\}) + d(\{z_n\},\{y_n\})$. Dann muß $\{x_n\} \neq \{y_n\}$ gelten, weil sonst links Null stünde, ein Widerspruch. Wäre $\{x_n\} = \{z_n\}$ oder $\{y_n\} = \{z_n\}$, so hätte man auf beiden Seiten den gleichen Ausdruck stehen, auch ein Widerspruch. Somit findet man, $a := \min\{k \mid x_k \neq y_k\}$, $b := \min\{k \mid x_k \neq z_k\}$ und $c := \min\{k \mid z_k \neq y_k\}$ setzend: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Sichtlich gilt $a < b$ und $a < c$ und wir können (nach eventuellem Tausch der Bezeichungen für $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$) erreichen, daß $b \leq c$, also insgesamt

$$a < b \leq c$$

gilt. Nun gilt $x_j = z_j$ für $j = 1,\ldots,b-1$ und $z_j = y_j$ für $j = 1,\ldots,c-1$, sodaß

$$x_j = y_j, \quad j = 1,\ldots,b-1,$$

und somit

$$a = \min\{k \mid x_k \neq y_k\} > b - 1$$

folgt. Deshalb gilt

$$a < b < a + 1,$$

ein Widerspruch, weil es im Intervall $(a, a+1)$ keine natürliche Zahl gibt.