1 Angabe

Es sei eine Funktion $f : I\!R^2 \to I\!R$ für $xy \neq 0$ durch

$$f(x,y) := \frac{x^2\left(\sin\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{y}\right) - y^2 \sin\frac{1}{y^2}}{|x| + |y|}$$

und für $xy = 0$ durch $f(x,y) := 0$ erklärt. Man stelle fest, ob die iterierten Grenzwerte für $x \to 0$ und $y \to 0$, der GW für $(x,y) \to (0,0)$ existieren, und ob die einfachen GW bei $x \to 0$ bzw. $y \to 0$ gleichmäßig bezüglich der anderen Variablen sind.

2 Lösung

Beh 1: $\lim_{x\to 0} f(x,y) = -|y| \sin\frac{1}{y^2}$ *für* $y \neq 0$ *und gleich Null für* $y = 0$. $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ *existiert nur für* $x = 0$ *und hat den Wert Null.*

BW.: Wenn $y = 0$ ist, so ist $f(x,y) = 0$ und der GW ist Null. Sei nun $y \neq 0$. Nun besagt die Definition des GW $b = \lim_{x\to 0} f(x,y)$, daß für jede gegen den Häufungswert $0 \in D(f(\cdot,y))$ konvergente Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \neq 0$ man $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y) = b$ hat. Wählt man die Folge $\{x_n\}$ derart, daß $x_n \neq 0$ für alle $n \in I\!N$ ist, so findet man $b = -|y| \sin\frac{1}{y^2}$.

Nun zu $\lim_{y\to 0} f(x,y)$. Sei zunächst $x \neq 0$. Dann existiert der GW nicht, weil $y \neq 0$ bei der Annäherung, und der Term

$$\frac{x^2 \sin\frac{1}{y}}{|x| + |y|}$$

keinen GW hat (bitte selbst durchdenken!). Wenn $x = 0$ so ergibt sich $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$.

Beh 2: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

BW.: Es ergibt sich für $xy \neq 0$ die Abschätzung

$$|f(x,y)| \leq \frac{2x^2 + y^2}{|x| + |y|} \leq \frac{2\max^2\{|x|,|y|\}}{|x| + |y|} \leq 2\max\{|x|,|y|\},$$

die, da $f(x,y) = 0$ für $xy = 0$ ist, schließlich für alle $(x,y) \in I\!R^2$ richtig ist. Da die Funktion $2\max\{|x|,|y|\}$ bei $(x,y) \to (0,0)$ gegen Null strebt, tut dies auch $f(x,y)$.

Beh 3: $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y)$ *existiert nicht. Hingegen ergibt sich für*

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y) = 0.$$

BW.: Die erste Teilbehauptung ist gleichwertig damit, zu zeigen, daß die Funktion $\phi(x) := \lim_{y\to 0} f(x,y)$ bei $x \to 0$ einen GW besitzt. Wegen Beh.1 ist $D(\phi) = \{0\}$ und hat keine HP. Deshalb existiert der GW $\lim_{x\to 0} \phi(x)$ nicht, w.z.z.w.

Die zweite Teilbehauptung bitte selbst durch x-en.

Beh 4: *Der einfache Grenzübergang $x \to 0$ ist bezüglich $y \in I\!R$ gleichmäßig. (Für den anderen einfachen Grenzübergang, $y \to 0$ ist die Gleichmäßigkeit nur für $x \in \{0\}$ gegeben.)*

BW.: Die in Klammer gesetzte Teilbehauptung soll hier nicht vorgeführt werden. Um die erste Teilbehauptung zu zeigen, ist zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, zu finden, sodaß für alle $x \in (-\delta, \delta)$ mit $y \neq 0$

$$|f(x,y) - \lim_{\xi\to 0} f(\xi,y)| = \cdots = \left| \frac{x^2\left(\sin\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{y}\right) + |xy|\sin\frac{1}{y^2}}{|x|+|y|} \right| < \epsilon$$

gilt. Die rechtsstehende Funktion läßt sich wegen $x^2 \leq |x|\max\{|x|,|y|\}$ und $|xy| \leq |x|\max\{|x|,|y|\}$ durch

$$3|x|$$

abschätzen. Diese Abschätzung ist auch für $y = 0$ und alle $x \in I\!R$ richtig, d.h. es ist

$$|f(x,0) - \lim_{\xi\to 0} f(\xi,0)| = 0 < 3|x|.$$

Somit findet man $\delta := \frac{\epsilon}{3}$.