1 Angabe

Erklären Sie, wie man $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+b}$ durch Integration einer geeigneten Potenzreihe berechnen kann ($a \in I\!N, b \in I\!N, \forall n \in I\!N : an + b \neq 0$). Führen Sie die Berechnung für $a := 3$ und $b := -1$ durch.

2 Lösung

Zunächst zur Bedingung an a und b: falls $b \in I\!N$ ist, ist sie automatisch erfüllt. Andernfalls darf b nicht durch a teilbar sein (also auch nicht Null sein!).

Die Idee besteht grundsätzlich darin, eine Reihe der Form $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)x^{an+b}$ gliedweise von 0 bis 1 zu integrieren. Da die Reihe für $x = 1$ konvergiert (Leibniz), hofft man, den Abelschen Grenzwertsatz verwenden zu können. Dabei muß n_0 geeignet gewählt werden, da sonst Integrale über Glieder mit negativem Exponenten auftreten, die an 0 kein Auswerten zulassen.

Beh 1: *Es sei* $n_0 > -\frac{b}{a}$ *so gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+b} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{(-1)^n}{an+b} + (-1)^{an_0+b} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a}.$$

Zunächst ist die Reihe

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-t)^{an+b}$$

für jedes feste $x \in (0, 1)$ auf dem Intervall $[0, x]$ in t absolut und gleichmäßig konvergent. Deshalb darf man Integration und Summation vertauschen und es ergibt sich mit der Bezeichnung

$$S(x) := \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^{an+b}x^{an+b}}{an+b}$$

für alle $x \in [0, 1)$ die Gleichung

$$\int_0^x \sum_{n=n_0}^{\infty} (-t)^{an+b} dx = S(x)$$

Der Integrand auf der linken Seite läßt sich mittels geometrischer Reihe in der Form

$$(-1)^{an_0+b} \frac{t}{1+t^a}$$

anschreiben. Da die Reihe $S(x)$ auf der rechten Seite für $x = 1$ wegen des Leibnizkriteriums konvergent ist, folgt aus dem Abelschen Grenzwertsatz unmittelbar, daß

$$S(1^-) := \lim_{x \to 1^-} S(x)$$

existiert. Deshalb ergibt sich

$$S(1^-) = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^a},$$

weil der Integrand auf dem ganzen Intervall $[0, 1]$ stetig ist, und somit das Integral als Funktion der oberen Grenze auch stetig ist. Fügt man die Details zusammen, ergibt sich die Behauptung.

Als Ergebnis findet man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n - 1} = -1 + \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$