1 Angabe

Indem man $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ benützt, stelle man die Rechteckformel für k Teilungspunkte auf. Man berechne die Näherungswerte für $k = 1, 2, 3$ und untersuche, ob die Näherung größer oder kleiner/gleich dem exakten Wert ist.

2 Lösung

Die Näherungsformel wurde von allen Kandidaten korrekt gefunden. Daß im vorliegenden Fall der Näherungswert größer ist, wurde an Hand einer Skizze veranschaulicht, jedoch nicht bewiesen. Das soll hier nachgeholt werden.

Beh 1: *Der Integrand,* $\ln x$ *erfüllt für alle* x, y *im angegebenen Intervall und alle* $s \in [0,1]$ *die Ungleichung* $\ln(sx + (1-s)y) \leq s \ln x + (1-s) \ln y$.

$\ln x$ ist 2 mal stetig differenzierbar und es ist $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Beh 2: *Sei* $\alpha < \beta$ *und es sei* f *auf* $J := [\alpha, \beta]$ *stetig, sowie für alle* $x, y \in J$ *und alle* $s \in [0,1]$ *gelte die Ungleichung*

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y).$$

Dann ist

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \geq (\beta - \alpha) f\left(\frac{b-a}{2}\right).$$

Zunächst teilen wir das Intervall $[\alpha, \beta]$ in die Hälfte und wenden die Substitution $x := \frac{a+b}{2} + \epsilon t$, $dx = -dt$ mit $\epsilon := -1$ im linken und $\epsilon := 1$ im rechten Intervall an. Einfache Rechnung und die Voraussetzung an f mit $x := \frac{a+b}{2} - t$, $y := \frac{a+b}{2} + t$ für $t \in [0, \frac{b-a}{2}]$ und $s := \frac{1}{2}$ ergibt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_0^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \left\{ f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \right\} dt \geq (\beta - \alpha) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Beh 3: *Für alle* $k \in I\!N$ *ist der mittels Rechtecksregel errechnete Näherungswert nicht größer als als* $\ln 2$.

Wegen Beh. 1 erfüllt $f(x) := \ln x$ die Prämisse von Beh. 2. auf ganz $[1, 2]$. Wenn nun J der Reihe nach die k Intervalle durchläuft und man die Monotoniegesetze für Ungleichungen anwendet, ergibt sich die Behauptung.