1 Angabe

Es sei $M_j := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid j-1 \leq x+y < j\}$, wobei $j \in \{1,2,3,4\}$. Weiters sei $N_1 := \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, $N_2 := \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$, $N_3 := M_3$, und $N_4 := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Man bilde die Mengen $L_j := M_j \cap N_j$ für $j := 2, \ldots, 4$ und $L_1 := \bar{M}_1 \cap N_1$. Schließlich sei $L := L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$. Man bestimme den Abschluß $\bar{L}$, den offenen Kern L°, und den Rand $\partial L := \bar{L} \setminus L^\circ$.

2 Lösung

Der Wert des Beispiels liegt darin, zu lernen, die womöglich maßlos erscheinende Detailarbeit durch Verwenden geeigneter Aussagen aus der Topologie so gut es geht "klein zu halten". Hoffe, mein Vorschlag hilft Ihnen als Anregung.

Beh 1: *Es gilt $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Es ist $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.*

Es ist $\overline{A \cup B} \supseteq A$, und da die links stehende Menge abgeschlossen ist, ist $\bar{A}$ auch in ihr enthalten. Analog für B. Somit gilt "$\supseteq$". Zur Umkehrung: Es ist $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$, und da die rechts stehende Menge abgeschlossen ist, muß sie $\overline{A \cup B}$ enthalten.

Die zweite Behauptung folgt durch vollständige Induktion nach der Anzahl der zu vereinigenden Mengen.

Um die dritte Behauptung zu zeigen, vermerkt man daß "$\subseteq$" unmittelbar klar ist. Nun sei $x \in A^\circ \cap B^\circ$. Dann gibt es offene Mengen U, V mit $x \in U \cap V$ mit $U \subseteq A^\circ$ und $V \subseteq B^\circ$. Deshalb ist $U \cap V$ offene Umgebung von x und ist in $A \cap B$ enthalten, und weil offen, auch in $(A \cap B)^\circ$.

Beh 2: *Es sei $X \times Y$ kartesisches Produkt topologischer Räume X und Y. Dann ist $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$ und $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.*

Die rechte Seite der ersten Teilbehauptung ist abgeschlossen, weil ihr Komplement in $X \times Y$, nämlich

$$C_{X \times Y}(\bar{A} \times \bar{B}) = (C_X(A) \times Y) \cup (X \times C_Y(B))$$

Vereinigung von offenen Mengen (aus der Basis der Produkttopologie) ist. Somit gilt "$\subseteq$". Sei nun $(x,y) \in \bar{A} \times \bar{B}$ und W eine beliebige offene Umgebung von (x,y). Dann enthält W (aufgrund der Definition der Produkttopologie) eine Umgebung der Form $U \times V$, wobei U offene Umgebung von x und V offene Umgebung von y ist. Dann ist $A \cap U \neq \emptyset$ und $B \cap V \neq \emptyset$ und somit $(A \times B) \cap (U \times V) \neq \emptyset$. Somit ist $(x,y) \in \overline{A \times B}$.

Die zweite Teilbehauptung sieht man so ein: Ein innerer Punkt der linken Seite hat eine Umgebung der Form $U \times V$ die ganz in $A \times B$ liegt, und somit ist x, bzw y innerer Punkt von A, bzw. B. Dieser Schluß läßt sich auch umkehren.

Beh 3: $\bar{L} = \bar{M}_1 \cup (\bar{M}_2 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{N})) \cup \bar{M}_3$. *Es ist* $\bar{M}_j = \{(x,y) \mid j-1 \leq x+y \leq j\}$

Die in der ersten Teilbehauptung rechts stehende Menge ist sichtlich abgeschlossen (endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen, jede selbst Durchschnitt abgeschlossener Mengen), und sie enthält sichtlich L, wobei man $M_4 \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \subset \bar{M}_3$ berücksichtigt. Deshalb muß "$\subseteq$" gelten.

"$\supseteq$": Beh.1. benützend, reicht es, die drei nachstehenden Mengeninklusionen zu zeigen:

$$\bar{L}_1 \supseteq M_1, \quad \bar{L}_2 \supseteq \bar{M}_2 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{N}), \quad \bar{L}_3 \supseteq M_3.$$

Die dritte ist sichtlich erfüllt. Um die erste einzusehen, genügt es, sich klarzumachen, daß jedes $(x,y) \in M_1$ für jedes $K_r(x,y)$ offenbar Punkte von L_1 enthalten muß. Deshalb ist jedes solche (x,y) HP von Elementen in L_1, gehört somit zu $\bar{L}_1$.

Sei $(x,y) \in \bar{M}_2 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{N})$, dann ist offenbar $y \in \mathbb{N}$ und $1 \leq x+y \leq 2$, also $1-y \leq x \leq 2-y$ muß gelten. In jeder Umgebung $K_r(x,y)$ liegt dann ein Punkt (ξ, y), wobei $\xi \in (1-y, 2-y) \cap \mathbb{Q}$. Ein solches (ξ, y) gehört dann zu L_2, sodaß $(x,y) \in \bar{L}_2$ folgt.

Intuition für die Bestimmung von L°: Es ist sichtlich $L^\circ \subseteq (\bar{L})^\circ$ und danach etwas simpler, zunächst letzteren zu bestimmen, weil man z.B. L_4 schon aus dem Spiel hat.

Beh 4: *Es ist* $(\bar{L})^\circ = M_1^\circ \cup M_3^\circ$ *und*

$M_3^\circ = \{(x,y) \mid 2 < x+y < 3\}$.

Sichtlich ist "$\supseteq$" erfüllt. Nun zur Umkehrung: Sei $(x,y) \in \bar{M}_2 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{N})$. Wie im vorigen Beweis festgestellt, ist dann $1-y \leq x \leq 2-y$, und falls $x \in (1-y, 2-y)$, so liegt in jeder Umgebung der Form $K_r(x,y)$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ ein Punkt $(x, y+\frac{1}{n})$, der sichtlich nicht zu $\bar{M}_2 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{N})$ gehört (weil sein Ordinate nicht ganzzahlig ist!). Somit verbleiben nur mehr die Punkte in $\bar{M}_1 \cup \bar{M}_3$. Da $\bar{M}_1 \cap \bar{M}_3 = \emptyset$, ist $\bar{M}_1^\circ \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \bar{M}_3$, also $M_1^\circ \cap M_3^\circ = \emptyset$. Somit genügt es, $(\bar{M}_j)^\circ = \{(x,y) \mid j-1 < x+y < j\}$ für $j = 1,3$ nachzuweisen. Die Funktion $f(x,y) := x+y$ ist sichtlich stetig als lineare Funktion ihrer Argumente. Deshalb ist das Urbild des offenen Intervalls $(j-1, j)$ unter f, nämlich $f^{-1}((j-1,j)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid j-1 < x+y < j\}$ offen, somit in $(\bar{M}_j)^\circ$ enthalten.

Es verbleiben Punkte (x,y) mit $x+y = j$ bzw. $j-1$. Im ersteren Fall ist bei vorgegebenem $r > 0$ der Punkt $(x, y+\frac{1}{n})$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ zwar in $K_r(x,y)$, gehört jedoch nicht zu $\bar{M}_j$. Im anderen Fall spielt $(x, y-\frac{1}{n})$ eine analoge Rolle.

Schließlich ist $\{(x,y) \mid j-1 \leq x+y \leq j\}$ das Urbild des abgeschlossenen Intervalls $[j-1, j]$ unter f, somit abgeschlossen. Somit umfaßt diese Menge

$\bar{M}_j$. Da in jeder Umgebung von (x, y) mit $x + y = j$ ein Punkt der Form $(x, y - \frac{1}{n})$, liegt, gehört (x, y) zum Abschluß von M_j. Ähnlich argumentiert man für (x, y) mit $x + y = j - 1$.

Beh 5: $L^\circ = M_3^\circ$

Aufgrund der Angabe muß wohl $M_3^\circ \subseteq L^\circ$ gelten. Es ist $L_1 \cap \bar{M}_3 = \emptyset$, sodaß das Innere von L_1 leeren Schnitt mit dem Inneren von M_3 haben muß (es ist nämlich L_1° in der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{M}_3$ enthalten!) Deshalb genügt es, $L_1^\circ = \emptyset$ nachzuweisen. Beh. 2 benützend findet man

$$L_1^\circ = (\bar{M}_1 \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}))^\circ = (\bar{M}_1)^\circ \cap (\mathbb{Q}^\circ \times \mathbb{R}^\circ) = (\bar{M}_1)^\circ \cap (\emptyset \times \mathbb{R}) = (\bar{M}_1)^\circ \cap \emptyset = \emptyset,$$

w.z.z.w.

Beh 6: $\partial L = \bar{M}_1 \cup (\bar{M}_2 \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{N})) \cup \partial M_3$. *Es ist* $\partial M_3 = \{(x, y) \mid x + y \in \{2, 3\}\}$.

Aus $\bar{L}$, wie in Beh. 3 angegeben, wird lediglich M_3° entfernt. Letzteres ist in Beh. 4 beschrieben. Da $\partial M_3 = \bar{M}_3 \setminus M_3^\circ$ ist, folgt die zweite Behauptung unmittelbar aus Beh. 3 ($j = 3$) und Beh. 4.