1 Angabe

Man ermittle die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) := \frac{2x^4 - x^2 + 4}{(x^2 + 3x + 4)(x - 1)^2}.$$

2 Lösung

Beh 1: *Der Nenner liegt in Faktorzerlegung in reell irreduzible Polynome vor*

Es genügt, festzustellen, daß die Diskriminante des quadratischen Faktors, nämlich $3^2 - 4.4 = -7$, negativ ist.

Beh 2: *Es gilt eine Gleichung reeller Polynome*

$$2x^4 - x^2 + 4 = (Ax + B)(x - 1)^2 + C(x^2 + 3x + 4)(x - 1) + D(x^2 + 3x + 4)$$

mit geeigneten reellen Konstanten A, B, C und D.

Die Form der Partialbruchzerlegung siehe Vorlesung. Danach Multiplizieren mit dem Nenner auf beiden Seiten von f.

Beh 3: $D = \frac{5}{8}$

In der obigen Gleichung setzt man $x := 1$. Links Auswerten ergibt 5 und rechts ergibt sich (nach Wegfallen aller Terme mit dem Faktor $(x-1)$) der Wert $8D$.

Beh 4: $A = -\frac{151}{64}$ *und* $B = -\frac{324}{64}$

Sei z die Nullstelle von $x^2 + 3x + 4$. Dann ist $z^2 = -3z - 4$, $z^3 = -3z^2 - 4z = -3(-3z-4) - 4z = 5z + 12$ und schließlich $z^4 = 9z^2 + 24z + 16 = 9(-3z-4) + 24z + 16 = -3z - 20$. Diese vorbereitende Rechnung erleichtert es, in die obige Gleichung z einzusetzen und die linke und rechte Seite in der Form $a + bz$ mit reellen Werten a, b anzuschreiben. In der Form, wie die weitere Rechnung läuft, können Wurzelausdrücke vermieden werden:

$$2z^4 - z^2 + 4 = -6z - 40 + 3z + 4 + 4 = -3z - 32,$$

und auf der rechten Seite bleibt nur vom ersten Term ein Anteil

$$\begin{aligned}
(Az + B)(z - 1)^2 &= (Az + B)(-3z - 4 - 2z + 1) \\
&= (Az + B)(-5z - 3) \\
&= -5Az^2 - 5Bz - 3Az - 3B \\
&= -5A(-3z - 4) - 5Bz - 3Az - 3B \\
&= 12Az + 20A - 5Bz - 3B.
\end{aligned}$$

Da 1 und z eine Basis des 2-dimensionalen reellen Vektorraums der komplexen Zahlen aufspannen (es ist ja z nicht reell!!!), können in der Gleichung

$$-32 - 3z = 20A - 3B + (12A - 5B)z$$

die Koordinaten der Basis verglichen werden:

$$-32 = 20A - 3B, \quad -3 = 12A - 5B.$$

Ein bisschen lineare Algebra ist oft recht brauchbar:

$$\begin{pmatrix} 20 & -3 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ -3 \end{pmatrix},$$

und da $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{-100+36} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -12 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -32 \\ -3 \end{pmatrix} = \ldots$$

was auf die gesuchten Werte für A und B führt.

Beh 5: $C = \frac{23}{64}$ Man differenziert die obige Polynomgleichung und setzt $x = 1$ ein. Dabei ergibt sich auf der rechten Seite kein Beitrag vom Summand mit dem Faktor $(x-1)^2$ ($x = 1$ ist schließlich doppelte Nullstelle) bzw. beim Anwenden der Produktregel kommt kein Beitrag, wenn man den Faktor $(x-1)$ nicht differenziert. Na ja, jetzt ist es im Grunde eine Kopfrechung:

$$2.4.1^3 - 2.1 = 0 + C.(1^2 + 3.1 + 4) + C.0 + D.(2.1^2 + 3.1),$$

und da $D = \frac{5}{8}$ ergibt sich hieraus rasch die Behauptung.