1 Angabe

Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^4+y^8} + (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}$ falls $x \neq 0$ und $f(0,y) := 0$ stelle man fest, ob die iterierten Grenzwerte für $x \to 0$ und $y \to 0$, der GW für $(x,y) \to (0,0)$ existieren, und ob die einfachen GW bei $x \to 0$ bzw. $y \to 0$ gleichmäßig bezüglich der anderen Variablen sind.

2 Lösung

Beh 1: *$\phi(x) := \lim_{y\to 0} f(x,y)$ existiert und es ist $\phi(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, sowie $\phi(0) = 0$.*

BW.: Einsichtig.

Beh 2: *Es ist $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$ und für $y \neq 0$ existiert $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ nicht.*

BW.: Einsichtig.

Beh 3: *$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$ und $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$ existiert nicht.*

BW.: Die erste Teilbehauptung ergibt sich klaglos als

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \phi(x) = 0.$$

Um die zweite Teilbehauptung nachweisen zu können, muß man sich auf die Grenzwertdefinition besinnen. Wegen Beh.2 ist $D(\psi) = \{0\}$, wobei $\psi(y) := \lim_{x\to 0} f(x,y)$. Da $D(\psi)$ keinen HP besitzt, existiert $\lim_{y\to 0}\psi(y)$ nicht.

Beh 4: *$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht.*

BW.: Angenommen er existiert. Dann ist $f(x,y) = g(x,y)+h(x,y)$, wobei $g(x,y)$ wie in Bspl. 177 definiert, und $h(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ bzw $h(0,y) = 0$ gilt. Die Abschätzung

$$|h(x,y)| \leq \max\{|x|,|y|\},$$

die für alle (x,y) mit $\max\{|x|,|y|\} \leq 1$ gültig ist, und die Tatsache, daß in dieser Abschätzung rechts eine Funktion steht, die bei $(x,y) \to (0,0)$ selbst gegen Null konvergiert, zeigen daß $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$ gilt. Wäre nun f stetig, so auch die Differenzfunktion $g = f - h$, im Widerspruch zu den Ergebnissen von Bspl. 177 (welches ziemlich ähnlich geht wie Bspl. 176).

Beh 5: *Der Grenzübergang $f(x,y) \to \phi(x)$ ist für kein Intervall $I := [-\eta,\eta]$ mit $\eta > 0$ gleichmäßig bezüglich $y \in I$.*

Bew.: Angenommen doch. Dann gibt es zu $\epsilon := 1$ ein $\delta > 0$, sodaß

$$\forall x: \quad |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \forall y \in I: \quad |f(x,y) - \phi(x)| < 1.$$

Nun wählen wir $k \in I\!N$ mit $y_k := \frac{2}{k\pi} \in I$ und $x_k := \frac{1}{k\pi} \in (-\delta, \delta)$. Dann ist

$$f(x_k, y_k) - \phi(x_k) = \cdots = \frac{4}{1 + \left(\frac{2}{k\pi}\right)^4},$$

und der Ausdruck rechts ist sicher ≥ 2, ein Widerspruch.

Es soll hier vermerkt werden, daß die Definition für $\lim_{x\to a} f(x)$ auf Seite 96, aber auch in Ana 1, Seite 66 in der Literatur gelegentlich anders gegeben wird, insofern, als man nicht verlangt, daß $a \in D(f)$ liegt (vgl. mit z.B. F.Erwe, Differential- und Integralrechnung Bd 1, S.107 ff):

Definition: *Es seien (M, d), (M', d') metrische Räume, $A \subseteq M$ und $f: A \to M'$ eine Abbildung. Ist $b \in M'$ und $a \in M$ ein HP der Menge A, derart daß für jede Folge $\{a_n\}$ mit $a_n \in A$ für alle $n \in I\!N$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ auch $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$, so schreibt man $b = \lim_{x\to a} f(x)$.*

Anmerkung: Diese DN zugrunde gelegt gilt: Ist $a \in D(f)$, so ist die Existenz des GW gleichwertig damit, daß $f(a) = b$, also f an a stetig ist. Ist $a \notin D(f)$, so ist die Existenz des GW gleichbedeutend damit, daß man durch $f(a) := b$ eine stetige Fortsetzung von f in den Bereich $D(f) \cup \{a\}$ festlegen kann.

Die DN der Vorlesung zugrunde gelegt gilt: Die Existenz des GW ist gleichbedeutend mit der Stetigkeit von f an der Stelle a. Ist $a \notin D(f)$ so existiert der GW nicht.