1 Angabe

Man zeige, daß auf $I\!N$ durch

$$d(x,y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

eine Metrik definiert wird, und beweise, daß damit die diskrete Topologie festgelegt wird.

2 Lösung

In der angegebenen Form sind die Axiome etwas leichter ersichtlich, ihr Erfülltsein soll hier nicht bewiesen werden. Sei nun $n \in I\!N$ ganz beliebig.

Intuition: Man sieht sofort ein, daß es im Intervall

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

keine Zahl der Form $\frac{1}{k}$ geben kann. Setzen wir $r := \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$, so erhofft man nun, $K_r(n) = \{n\}$ zeigen zu können.

Hier der formale Nachweis:

Es sei $y \in K_r(n)$ und o.B.d.A $y > n$. Wir wollen einen Widerspruch herleiten. Es ist

$$\begin{aligned} d(n,y) &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{y}\right| \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{y} \\ &\leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}), \end{aligned}$$

sodaß

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

nach Äquivalenzumformungen auf

$$\frac{2n(n+1)}{2n+1} \geq y,$$

und da der linke Ausdruck hierin sichtlich kleiner als $n+1$ ist, ergibt sich ein Widerspruch zu $y > n$ und $y \in I\!N$.

Ähnlich argumentiert man für $y < n$.