Wiener Studien zur Politischen Ökonomie

Band 6

Konjunktur und Wachstum

Hanappi (1991)

Schriftenreihe herausgegeben von Univ.-Prof. Dr. Gerhard Hanappi

ISSN 2074-9880

Wachstums- und Konjunkturtheorie

Einige grundlegende Modelle

A.Univ-Prof. Mag. Dr. Hanappi

Die folgenden zusammenfassenden mathematischen Modelle sollen einen ersten Einblick in die mathematisch formulierten Beschreibungen ökonomischer Wachstumsprozesse ermöglichen. Obwohl der empirisch beobachtete Wachstumsprozeß immer durch Ungleichgewichtigkeit – also durch Konjunkturen – gekennzeichnet ist, werden aus didaktischen Gründen im ersten Teil reine Wachstumsmodelle behandelt während sich der zweite Teil Konjunkturmodellen widmet.

Die verbale Interpretation der Modelle bleibt spärlich und stichwortartig, da der Text über viele Jahre nur begleitend zur gleichnamigen Vorlesung verwendet wurde. Auch die mathematische Darstellung geht von einem Mathematik studierenden Publikum aus, dessen Verständnis die fehlende Rigorosität des vorgestellten Materials verzeiht. Die Originalartikel sind zitiert und durchwegs Klassiker; daher leicht über das Internet beziehbar.

Inhalt

1. ÖKONOMISCHER MODELLBAU

– Womit beschäftigen sich Wachstums- und Konjunkturtheorie

– Welches sind die wesentlichen Variablen

– In welcher Beziehung stehen sie zueinander

Zentrale Größe der Wachstumstheorie: Wertschöpfung

$Y = C + S$, $Y = C + I$, $Y = W + G$, Sektoren von Y

Einfache Wachstumsprognosen:

Zeitreihenprognose für Y

Theorem von Abraham Wald: jedes Strukturmodell ist mit einem Satz von Zeitreihenmodellen beschreibbar

Prognose mittels Konjunkturindikatoren

Konjunkturtests etc.

Empirische Evidenz:

1. Wertschöpfung der Industrieländer begann mit der Industrialisierung systematisch zu wachsen [Hanappi, 1986]
2. Langfristige Wachstumsraten sind mit der Anfangsausstattung an Humankapital positiv korreliert [Barro R.J., QJE, March 1991]
3. Hohes Humankapital ist mit niedrigem Populationswachstum und hoher Investitionsquote gekoppelt [Barro R.J., QJE, March 1991]
4. Wachstum und politische Stabilität sind positiv korrelliert
5. Konvergenz oder Divergenz der Wachstumsraten verschiedener Länder ist umstritten (z.B. [Romer P.M., JPE, 1986] versus [Barro/Sala-i-Martin, JPE, 1992])
6. Wissen als öffentliches Gut spielt eine wesentliche Rolle im Wachstumsprozeß [Caballero & Jaffe, NBER, 1993]

Einige notwendige Komplikationen realitätsnäherer Modelle

- **Y ist durch Bestandsgrößen bestimmt**
  - ⇒Theorie der aggregierten Produktionsfunktion
  - ⇒Bestandsgröße „Arbeit“ ist durch ein demographisches Submodell zu beschreiben
  - ⇒Bestandsgröße „Kapital“ ist durch Investitionstheorie und Abschreibungsfunktion zu beschreiben
  - ⇒„Technisches Wissen“ ist ebenfalls eine Bestandsgröße und muß beschrieben werden (oft vernachlässigt).
- **Real beobachtbare Wirtschaft ist stets eine monetäre Wirtschaft**
  - ⇒Theorie der Preisbildung
  - ⇒Theorie der Lohnbildung
  - ⇒Theorie der Zinsbildung
- **Es muß zugleich ein Wachstumspfad und die Zyklen um diesen erklärt werden**
  - ⇒Theorie gleichgewichtiger Wachstumspfade
  - ⇒Theorie exogener Schocks gleichgewichtiger Pfade
  - ⇒Theorie endogener Zyklen (Konjunkturtheorie)
  - ⇒Unterscheidung nach Art des Ungleichgewichtes: nach Sektoren, asymmetrische Information, Mehrländer-Modelle ⇒ Außenhandelstheorie, Wechselkurstheorie, ...
- **Untersuchung staatlicher Einflußgrößen**
  - ⇒Finanzierung, Wirkung, Nettoeffekt
  - ⇒Koordinierung bzw. Konkurrenz im Mehrländerfall

2. WACHSTUMSTHEORIE

2.1 Das HARROD-DOMAR MODELL

Originalartikel:
Harrod, 1939, „An Essay in Dynamic Theory“.
Domar, 1946, „Capital Expansion, Rate of Growth and Employment“.
Aufbereitet nach [Flaschel P., 1993, S.71-80].

– Die Übereinstimmungen zwischen den beiden Modellen bezieht sich auf den **Gleichgewichtspfad** (steady state) bei dem alle Variablen mit konstanter Rate wachsen.

– Bei Abweichungen von diesem Gleichgewichtspfad:
  ⇒ Harrod: beschreibt dynamische Instabilität
  ⇒ Domar: beschreibt Unterbeschäftigungsgleichgewicht bei Überkapazitäten des Kapitalstocks

Beide Modelle sind dogmengeschichtlich als Ergänzungen zu Keynes zu verstehen.

Modellannahmen:

A1) Es wird eine geschlossene Wirtschaft betrachtet in der nur **ein Gut** existiert, das entweder konsumiert oder investiert werden kann. (Y)

A2) Der Output Y wird durch Arbeit L und Kapital K produziert. K ist akkumulierte vergangene Investition I. Die **Produktionsfunktion** ist durch fixe Koeffizienten gekennzeichnet:σ ,y.

$$Y = \min\{\sigma K, yL\} = \min\left\{\frac{K}{v}, \frac{L}{\alpha}\right\}$$

A3) Die einfachste Keynesianische **Sparfunktion** lautet
S = sY ; s = const.

Die **Kaldorsche Sparfunktion** ist eine einfache Erweiterung:

$$S = s_p(rK) + s_w(wL) = s_p(Y - wL) + s_w(wL)$$

$$0 \leq s_w < s_p < 1$$

A4) Die **Investitionsfunktion** kann durch das einfache Akzeleratorprinzip beschrieben werden:

$$I = \frac{(Y^* - Y)}{\sigma} = v(Y^* - Y)$$

mit:
$v = \frac{1}{\sigma}$ ... Kapitalkoeffizient,
Y^* ... erwartete Nachfrage

A5) Gleichgewicht am **Gütermarkt**: I = S

A6) Das **Wachstum** der Produktionsfaktoren wird beschrieben durch:
$\hat{L}^s = n = const$; n .. natürliche Wachstumsrate
$\dot{K} = S$ (= I)

Bemerkung:

Notation: $\hat{x} = \frac{\dot{x}}{x}$ mit: $\dot{x}$ .. Ableitung von x nach der Zeit

Regeln: $\widehat{xy} = \hat{x} + \hat{y}$; $\widehat{\left(\frac{x}{y}\right)} = \hat{x} - \hat{y}$

HARROD:

1.) Es gibt nur eine Wachstumsrate des Outputs bei der die Erwartungen der Unternehmer zutreffen. Diese heißt **erwünschte Wachstumsrate** (warranted rate of growth) g_w und kann aus den Annahmen A3, A4 und A5 abgeleitet werden.

$$\left.\begin{array}{l} S = sY \\ I = v^p(Y^* - Y) \\ I = S \end{array}\right\} \quad v^p(Y^* - Y) = sY$$

$\Rightarrow \quad \frac{s}{v^p} = \frac{Y^* - Y}{Y} =: g_w$ mit: v^p... gewünschte capital-output-ratio

2.) Der gewünschte Wachstumspfad ist dynamisch instabil; Abweichungen erzeugen immer größere Abweichungen (Knife-edge growth).

3.) Es ist höchst unwahrscheinlich, daß die natürliche Wachstumsrate gleich g_w ist.

Mathematische Formulierung von 2.) ist in mehrfacher Weise möglich.
Formulierung von **Sen** (1970): (diskrete Zeit)

$$I_t = S_t = sY_t$$

$$I_t = v(Y_t^* - Y_{t-1})$$

Def.: $g_t = \dfrac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_t}$ $\quad g_t^* = \dfrac{Y_t^* - Y_{t-1}}{Y_t^*} \Rightarrow g_t = 1 - (1 - g_t^*)\dfrac{s/v}{g_t^*}$

Zusätzliche Annahme: ***adaptive Erwartungen***

$$g_{t+1}^p = g_t^* + \alpha\left(g_t - g_t^*\right) \quad \alpha \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \; g_{t+1}^p - g_t^* = \alpha \frac{(1 - g_t^*)(g_t^* - \frac{s}{v})}{g_t^*} \quad \Rightarrow \quad g_t^* < \frac{s}{v} \Leftrightarrow g_{t+1}^p < g_t^*$$

DOMAR:

Benützt die gleichen Annahmen. Stellt sich die Frage, wie der gleichgewichtige Wachstumspfad aussieht, wenn (im Gegensatz zu Keynes) sowohl der ***Einkommenseffekt***, als auch der ***Kapazitätseffekt*** von Investitionen berücksichtigt wird.

Kapazitätseffekt:

$\dot{Y}^p = \sigma \cdot \dot{K} = \sigma \cdot I$ $\quad$ ($Y^p := \sigma \cdot K$ ... potentieller Output)

Einkommenseffekt: $Y = \dfrac{1}{s} I$ (siehe A3 und A5)

$\Rightarrow$ differenzieren: $\dot{Y} = \dfrac{\dot{I}}{s} \quad \Rightarrow \quad \sigma \cdot I = \dot{Y}^p = \dot{Y} = \dfrac{\dot{I}}{s} \quad \Rightarrow$

$\hat{I} = \dfrac{\dot{I}}{I} = \sigma \cdot s = \dfrac{s}{v}$ (wie bei Harrod)

Alternative Formulierung mittels Kapazitätsauslastung

$$\theta = \frac{Y}{Y^p}:$$

$$\hat{\theta} = \hat{Y} - \hat{Y}^p = \text{(in Wachstumsraten)}$$

$$= \quad \hat{I} - \frac{\sigma \cdot I}{I/s} \cdot \frac{Y}{Y^p} = \hat{I} - \sigma \cdot s\theta$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten daher:

$\theta = 1$ ($t = 0$), $\hat{\theta} = 0$ ($\forall t \geq 0$)

$$\Rightarrow \quad \hat{I} = \sigma \cdot s = \hat{Y} = \hat{Y}^p = \hat{K}$$

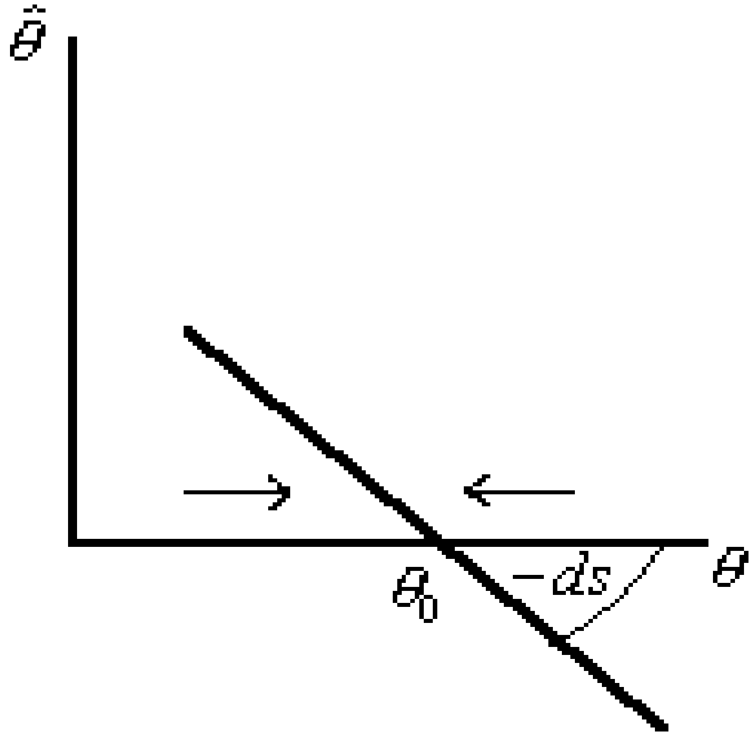
Was geschieht wenn die Investitionen mit einer anderen Rate als $\bar{g} \neq \sigma \cdot s$ wachsen ?

$$\hat{\theta} = \bar{g} - (\sigma \cdot s)\theta$$

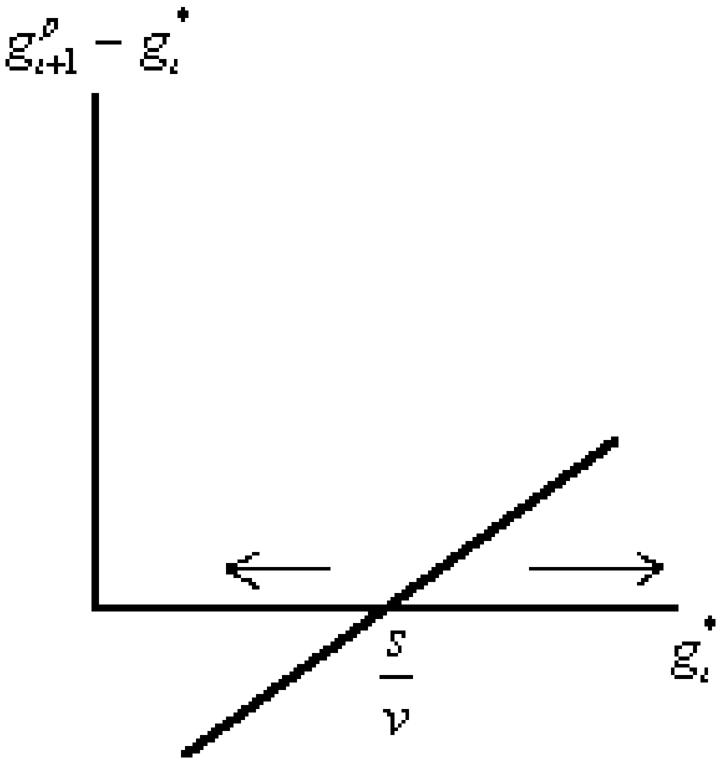
Es existiert dann (im Gegensatz zu Harrod) eine gleichgewichtige, stabile Kapazitätsauslastung θ_0 für die gilt:

$$\theta_0 = \frac{\bar{g}}{\sigma \cdot s} < 1 \quad \text{wenn} \quad \bar{g} < \sigma \cdot s$$

Graphischer Vergleich



Domars stabiles Unterauslastungsgleichgewicht



Harrods dynamische Instabilität

2,2 Das NEOKLASSISCHE WACHSTUMSMODELL

Robert Solow (1956): „A Contribution to the Theory of Economic Growth“

(A2') Y = F(K, L) ... neoklassische Produktionsfunktion mit:
- konstanten Skalenerträgen, also $Y = F(K, L) \Rightarrow F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^1 Y$
- $F_K > 0, \; F_L > 0$
- $F_{KK} < 0, \; F_{LL} < 0$

zusätzlich meist: $F_{KL} > 0, \; F_{LK} > 0$, Abschreibungen gleich 0

(A4') I ≡ S (keine unabhängige Investitionsfunktion)
zurückgehend auf „Say's Law“: „Die Summe der Überschußnachfrage auf allen Märkten ist stets Null“

(A7) $w = F_L(K, L^s)$ - Der Reallohn w stellt sich am Arbeitsmarkt so ein, daß bei einem Arbeitsangebot L^s Vollbeschäftigung herrscht.

(A3) bleibt erhalten: S = sY (wird allerdings in neueren „Overlapping-Generations“- Modellen von modernen Neoklassikern modifiziert)

(A6) bleibt erhalten: $\hat{L}^s = n = const; \quad \dot{K} = I$ Kapital ist stets voll ausgelastet (Unterschied zu Domar)

Wenig Gemeinsamkeiten mit dem Harrod-Domar-Modell:
dort: Problem der Erklärung von Arbeitslosigkeit und Überkapazitäten. Typisch für die späten 30er Jahre
hier: Diese Probleme werden schon durch die neuen Annahmen ausgeschlossen. Typisch für 50er und 60er Jahre.

Dynamik stammt **nicht** vom Zusammenspiel zwischen Multiplikator und Akzelerator, sondern nur von der natürlichen Wachstumsrate des Arbeitsangebotes.
Da Solow sein Modell als Kritik an Harrod und Domar betrachtet, kann sich diese damit nur auf die *Relevanz der Annahmen* beziehen.

$\dot{K} = sF(K, L)$ mit: $L = L^s$

$l := \frac{L}{K}$ ... Arbeitsintensität

$\hat{l} = \widehat{\left(\frac{L}{K}\right)} = \hat{L} - \hat{K} = n - \frac{\dot{K}}{K}$ mit $f(l) := F(1, l) = F(\frac{K}{K}, \frac{L}{K})$

$\Rightarrow \; \hat{l} = n - sF(\frac{K}{K}, \frac{L}{K}) = n - sf(l)$!! = **grundlegende Gleichung** des neoklassischen Wachstumsmodells

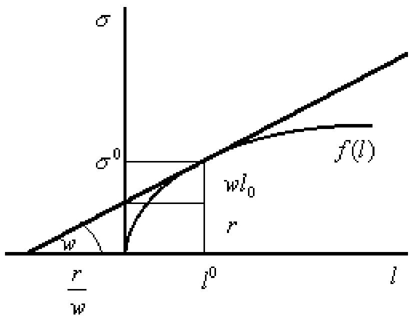
$\frac{Y}{K} = \sigma = f(l)$

$w = F_L(K, L) = F_L(1, l) = f'(l)$

Aus Einkommensverteilung: Y = wL + rK mit r ... Profitrate

$\frac{Y}{K} = \sigma = wl + r \;\Rightarrow\; r = f(l) - f'(l)l = F_K$ bei l=0 gilt σ = r

Graphische Darstellung des neoklassischen Wachstumsmodells:



Das neoklassische Wachstumsmodell impliziert auch eine bestimmte Verteilungstheorie!

Alternative Formulierung mittels k (Kapazitätsauslastung , $k = \frac{K}{L}$):

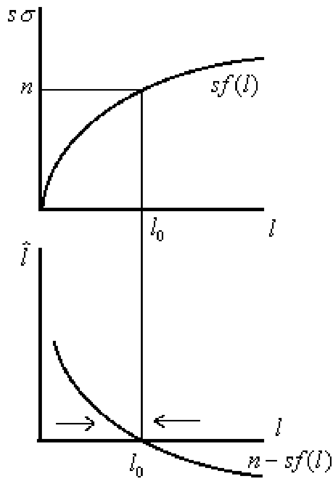
$$\tilde{f}(k) = F(k,1) = \frac{f(l)}{l} \quad \text{bzw.} \quad f(l) = \frac{\tilde{f}(k)}{k}$$

$$\hat{k} = -\hat{l} \Rightarrow \hat{k} = sf(l) - n = s\frac{\tilde{f}(k)}{k} - n$$

$$\dot{k} = s\tilde{f}(k) - nk$$

<u>**Stabilitätsanalyse:**</u>

$$s\sigma = sf(l) = n - \hat{l}$$



D.h. das Modellgleichgewicht ist stabil!

<u>Solow folgert daher:</u>
Wenn zusätzlich für die Produktionsfunktion die Inada-Bedingungen gelten (i.e. f(0) = 0, f(∞) = ∞), dann gilt:
1.) Es existiert genau ein gleichgewichtiges l_0.
2.) Das gleichgewichtige Wachstum ist stabil (global) mit der Wachstumsrate n, die bei Störungen druch Änderung von l wieder angenähert wird.
3.) Das gleichgewichtige l_0 ebenso wie der pro-Kopf-Konsum $c_0 = (1-s)\tilde{f}(k)$ hängen zwar von s ab, das langfristige Gleichgewichtswachstum aber nicht:

$$\left[\left(l_0 = \frac{K}{L} = const\right) und \left(\hat{L} = n = const\right)\right] \Rightarrow \hat{K} = n$$

[$\left(\hat{K} = \hat{L} = n\right)$ und (constant returns to scale)] $\Rightarrow \hat{Y} = n$

4.) Im Gleichgewicht gilt:

$$n = sf(l_0) = s\sigma_0 = \frac{s}{v_0}$$ mit v_0 ... Harrods ggw „warranted rate of growth“ (jedoch stabiles Wachstum)

Anders als von Solow kritisiert, muß die Instabilität in Harrods Modell aber nicht auf die fehlenden Substitutionsmöglichkeiten in der Produktionsfunktion zurückgeführt werden.
<u>Nikaido (1980)</u> zeigt wie ein instabiles neoklassisches Modell durch die Einführung einer Investitionsfunktion erzeugt werden kann:
Konzept der **effektiven Nachfrage** (Keynes) Y_K:
wenn I < S, also $\frac{I}{S} < 1$, so folgt: $Y_k := \frac{I}{S}Y = \frac{I}{sY}Y = \frac{I}{s} < Y$ (mit s .. Sparneigung)

1.) Investitionsfunktion:

$$Y = \min\left\{ Y_K = \frac{I}{s}, Y^p = F(K, L^s) \right\}$$ mit Y^p ... potentieller Output

2.) Reaktion der Investitionsquote auf Überkapazitäten:

$$\left(\frac{I}{K}\right) = \alpha \frac{Y_K - Y^p}{K}$$ mit $\alpha > 0$

$$\hat{\sigma} = \hat{I} - \hat{K} = \frac{I}{K} = \alpha\left(\sigma - \sigma^p\right) = \alpha\left(\sigma - f(l^s)\right)$$ mit: $\sigma^p = \frac{Y^p}{K}, \sigma = \frac{Y_K}{K} = \frac{I/s}{K}$

$$\hat{l}^s = n - \hat{K} = \begin{cases} n - \frac{I}{K} = n - s\sigma & \text{wenn } Y = Y_K \\ n - sf(l^s) & \text{wenn } Y = Y^p \end{cases}$$

System zweier Differentialgleichungen in σ und l^s. ⇒ Instabil!
⇒ Investitionsfunktion ist das entscheidene Element in Harrods „Knife-edge“ Wachstum.

2.3 Ein Schumpeter Modell - Aghion & Howitt

Grundmodell

Die Anzahl der Arbeitskräfte sei L Personen, von denen jede eine Einheit (homogener) Arbeit pro Periode leisten kann. Das aggregierte Arbeitsangebot pro Periode ist damit ebenfalls L. Die Zeitpräferenzrate r aller Personen sei gleich dem Zinssatz und der Nutzen jeder Person hänge von der Menge an Konsumgut yinfolgenderWeiseab:

$$u(y) = \int_0^\infty y_\tau \cdot e^{-r\tau} d\tau$$

Die Produktionsfunktion des Konsumgutes werde durch

$$y = A \cdot x^\alpha$$

beschrieben. In dieser Funktion ist A der Technologieparameter und x die Menge eines intermediären Inputgutes. Für den Parameter α gelte

$$0 < \alpha < 1$$

und der Technologiefaktor A wachse mit dem konstanten Faktor γ, wobei $\gamma > 1$ sei.

Arbeit könne entweder zur Produktion des Intermediärgutes x oder zur Entwicklung technischen Fortschritts, n, verwendet werden:

$$L = x + n$$

Wird Arbeit für Forschung verwendet, so werde die Entstehung von Innovationen durch einen Poisson-Prozeß beschrieben. Die Poissonrate für den Eintritt einer Innovation sei $\lambda \cdot n$, mit $\lambda > 0$. Hier beschreibt λ die Produktivität des Forschungsprozesses.

Es werde weiters angenommen, daß die erfolgreiche Innovation zu einer sofortigen Monopolisierung des gesamten Sektors führt, die bis zur nächsten erfolgreichen Innovation andauert.

Kann Arbeit zwischen Produktion und Forschung frei substituiert werden, so muß weiters gelten, daß der Lohnsatz im Produktionssektor, w_t, gleich dem erwarteten Gewinn aus der nächsten erfolgreichen Innovation sein muß:

$$w_t = \lambda \cdot V_{t+1}$$

Der Index t gibt hier die Anzahl der erfolgreichen Innovationen an, sodaß V_{t+1} den diskontierten Gewinn der nächsten Innovation bezeichnet. Multipliziert mit λ, der Wahrscheinlichkeit, daß diese eintritt, ergibt sich der zu erwartende, diskontierte Gewinn. Andererseits kann V_{t+1}auch als Gegenwartswert eines Aktivas (etwa eines Patentes) dargestellt werden, das dem innovativen Monopolisten in der Intermediärgüterproduktion den Gewinn π_{t+1} einbringt. Da dieser Gewinn mit Eintreten der nächsten Innovation sofort und zur Gänze verschwindet muß zur Berechnung von V_{t+1}der Erwartungswert dieses Ereignisses (vor Diskontierung) von π_{t+1} subtrahiert werden. Da die Wahrscheinlichkeit der nächsten Innovation $\lambda \cdot n_{t+1}$ ist - n_{t+1} ist die nach der Innovation $t+1$ für Forschung aufgewandte Arbeit - gilt:

$$V_{t+1} = \frac{\pi_{t+1} - \lambda \cdot n_{t+1} \cdot V_{t+1}}{r}$$

Implizit wird hier angenommen, daß der jeweilige innovative Monopolist nach Eintreten seiner Innovation keine Forschung mehr betreibt. Durch Umformung erhält man

$$V_{t+1} = \frac{\pi_{t+1}}{r + \lambda \cdot n_{t+1}}$$

Der Nenner entspricht hier insofern Schumpeters Begriff "kreativer Zerstörung" durch Innovation als eine Erhhöhung erwarteter Forschungsaktivitäten nach der erfolgten Innovation, also von n_{t+1}, zu einer Verringerung ihres Wertes führt, da die Monopolprofite ja nur mehr für einen als kürzer erwarteten Zeitraum lukriert werden können.

Um das Modell zu schließen werden nun noch π_t und x_t aus der Gewinnmaximierung des Innovators abgeleitet:

$$\pi_t = \max_x \left[p_t\left(x\right) \cdot x - w_t \cdot x\right]$$

Hier ist $p_t\left(x\right)$ die Absatzfunktion, die die Nachfrage des Konsumgütersektors nach Intermediärgütern beschreibt. Bei vollkommener Konkurrenz am Intermediärgütermarkt wird Preis gleich Grenzproduktivität sein,

$$p_t\left(x\right) = A_t \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

sodaß die Bedingung erster Ordnung für das obige Maximierungsproblem die folgenden Lösungen liefert:

$$\begin{aligned}
x_t &= \left(\frac{\alpha^2}{\frac{w_t}{A_t}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv \left(\frac{w_t}{A_t}\right) \\
\pi_t &= A_t \cdot \alpha \cdot x_t^{\alpha} - w_t \cdot x_t = (\frac{1}{\alpha} - 1) \cdot w_t \cdot x_t = A_t \cdot \widetilde{\pi} \cdot \left(\frac{w_t}{A_t}\right)
\end{aligned}$$

Definiert man den um die Produktivität korrigierte Lohn als $\omega_t = \frac{w_t}{A_t}$, so wird der gleichgewichtige Wachstumspfad durch

$$\omega_t = \omega \text{ und } n_t = n$$

festgelegt. Die Allokation von Arbeit zwischen Produktion und Forschung bleibt hier ebenso konstant wie der um die Produktivität korrigierte Lohnsatz. Bei Auftreten einer Innovation wachsen Löhne, Gewinne und Output mit dem Faktorγ.

2.4 MULTISEKTORALES WACHSTUMSMODELL

Beispiel: 2-Sektoren Modell mit limitationaler Technologie

Y_K ... Output des Kapitalgütersektors,
Y_c ... Output des Konsumgütersektors

Produktionskoeffizienten u_i, x_i (mit $i \in \{K, C\}$):

$$u_i := \frac{L_i}{Y_i} = const., \quad x_i := \frac{K_i}{Y_i} = const.$$

Kapitalintensitäten $k_i := \frac{K_i}{L_i} = \frac{x_i}{u_i} = const.$ außerdem $k_k \neq k_c$

Gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität k_0:

$$k_0 = \frac{K}{L} = \frac{K_k + K_c}{L} = \frac{K_k}{L_k}\frac{L_k}{L} + \frac{K_c}{L_c}\frac{L_c}{L} = k_k \lambda_k + k_c \lambda_c$$

mit: $\lambda_i = \frac{L_i}{L}$ ... Anteil am Gesamtinput Arbeit,
und: $\lambda_k + \lambda_c = 1$

$$\Rightarrow k_0 = k_c + \lambda_k (k_k - k_c), \quad \text{oder: } k_0 = k_k + \lambda_c (k_c - k_k)$$

$$\Rightarrow (k_k \geq k_0 \geq k_c) \vee (k_k \leq k_0 \leq k_c)$$

Angenommen $L^* = L^s$ sei das Vollbeschäftigungsniveau und K^* sei die Kapazitätsauslastung des Kapitals

Welche Bedingungen müssen bei Vollbeschäftigung gelten ?

$$K^* = K_k + K_c = x_k Y_k + x_c Y_c$$
$$L^* = L_k + L_c = u_k Y_k + u_c Y_c$$

$$\Rightarrow k_0 = k^* = \frac{x_k Y_k + x_c Y_c}{u_k Y_k + u_c Y_c}$$

Sei das mit Vollbeschäftigung vereinbare Verhältnis der Gütermengen $j^* := \left(\frac{Y_c}{Y_k}\right)^*$ (beachte: $x_i = k_i u_i$)

Die Bedingung für das **Periodengleichgewicht auf den Faktormärkten** lautet dann

$$j^* = \frac{u_k}{u_c} \frac{(k_0 - k_k)}{(k_c - k_0)}$$

Welche Bedingungen müssen nun im Wachstumsprozeß gelten, um dieses Periodengleichgewicht zu erhalten ?

$$\hat{K} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{I}{K} = \frac{Y_k}{K}$$

(Y_k ist der Output des Kapitalgütersektors, also Investition)

$$\hat{K} = \frac{Y_k}{x_k Y_k + x_c Y_c} = \frac{1}{x_k + x_c j}$$

Einsetzen und umformen ergibt: $\hat{K} = \dfrac{k_c - k_0}{k_0 u_k (k_c - k_k)}$

Man beachte, daß hier nur k_0 variabel ist!

Zwei Grenzwerte sind möglich:

1.) $k_0 = k_c \Rightarrow \hat{K} = 0$ (es werden nur Konsumgüter produziert)

2.) $k_0 = k_k \Rightarrow \hat{K} = \frac{1}{x_k} = \frac{Y_k}{K_k}$ (nur Kapitalgüter, daher maximales Wachstum)

Bei unterschiedlichen Faktorwachstumsraten muß daher gelten:
$0 \leq \hat{K} \leq \frac{1}{x_k}$ um Vollbeschäftigung aufrecht zu erhalten.

Langfristiges Steady-State-Wachstum erfordert darüber hinaus: $\hat{L} = \hat{K}$, (da $n = \hat{L} = const.$ gegeben ist) und es gilt:

$$n = \hat{K} = \frac{k_c}{k_0 u_k (k_c - k_k)}$$

Es gibt nur ein k_0, das diese Bedingung erfüllt:

$$k_0^* = \frac{k_c}{1 + n u_k (k_c - k_k)}$$

Ein solches k_0^* ist immer dann möglich, wenn gilt:
$0 \leq n = \hat{K}^* < \frac{1}{x_k}$
Damit ist die *Möglichkeit* gleichgewichtigen Wachstums bei limitationaler Technologie gezeigt!

Stabilität:

Was geschieht wenn, ausgehend vom gleichgewichtigen Wachstumspfad, n sicht ändert ?

$$\frac{dk_0^*}{dn}=\frac{k_c u_k (k_k-k_c)}{\left[1+u_k n(k_c-k_k)\right]^2}$$

Fallunterscheidung: **Fall 1.)** $k_k < k_c \Rightarrow \frac{dk_0^*}{dn} < 0$

Fall 2.) $k_k > k_c \Rightarrow \frac{dk_0^*}{dn} > 0$

Nur Fall 1.) ist **stabil**: n und k_0^* bewegen sich in entgegengesetzte Richtung. Die tatsächliche durchschnittliche Kapitalintensität bewegt sich in die gleiche Richtung wie k_0^*, da das Gewicht jenes Sektors verstärkt wird, der den reichlicher gewordenen Faktor intensiver nutzt.

Fall 2.) ist **instabil**: $k_k < k_c$ ist eine hinreichende und notwendige Stabilitätsbedingung (Shinkai, 1960).
Bei substitutionaler Technologie kann dieses Ergebnis verallgemeinert werden und es zeigt sich, daß diese Bedingung nur eine von mehreren hinreichenden Bedingungen ist.

Betrachtung der Nachfrageseite:

Annahmen:
Konsumgüterpreis ist $1 = p_c$,
Kapitalgüterpreis ist $p := p_k = \frac{p_k}{p_c}$

Wertmäßiger Output nach Sektoren und Verteilung:

$$Y = pY_k + Y_c = rK + wL$$

(r ... Zinssatz, w ... Lohnsatz)

sektoral gilt (aufgrund von Erlös gleich Kosten + Gewinn):

$$\begin{aligned} pY_k &= rK_k + wL_k \\ Y_c &= rK_c + wL_c \end{aligned}$$ (System von 2 Gleichungen)

$$\Rightarrow \quad \frac{pY_k}{Y_c} = \frac{rK_k + wL_k}{rK_c + wL_c}$$

$$\Rightarrow p = \frac{u_k + {}^{r}\!/_{w}\, x_k}{u_c + {}^{r}\!/_{w}\, x_c}$$ variabel sind hier: p, r, w.

Die Extremwerte der Faktorpreisrelation $\frac{r}{w}$ lauten:

1.) $\frac{r}{w} = 0 \Rightarrow p = \frac{u_k}{u_c}$

2.) $\frac{r}{w} = \infty \Rightarrow p = \frac{x_k}{x_c}$

Damit ist der Schwankungsbereich von $p = \frac{p_k}{p_c}$ bestimmt.

Man nehme nun an, daß das Sparen gleich Investitionsnachfrage (S = I) sei

$$\left.\begin{aligned} S &= sY = spY_k + sY_c \\ I &= pY_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad pY_k = spY_k + sY_c$$

$$\Rightarrow\ p = \frac{s}{1-s}\, j$$

Für ein angebotsseitig gegebenes gleichgewichtiges j^* existiert daher genau ein $p^* = \frac{s}{1-s}\, j^*$.

Langfristiger Zusammenhang:

$$\hat{K} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{I}{K} = \frac{Y_k}{K}\ \Rightarrow \text{erweitert um Preise} \Rightarrow \hat{K} = \frac{pY_k}{pK} = \frac{s}{x} \quad \text{mit}$$

$$x = \frac{pK}{Y}$$ ...wertmäßiger Kapitalkoeffizient

Langfristig muß daher gelten: $n = \frac{s}{x} = \frac{pY_k}{pK}$

Andere Möglichkeiten von Sparhypothesen:

1.) Kaldor: $S = s_p(rK) + s_w(wL)$ mit: $0 < s_w < s_p < 1$

$$\Rightarrow n = \frac{s_w + (s_p - s_w)\frac{rK}{Y}}{\frac{pK}{Y}}$$

Ein eindeutiges p ist errechenbar.

2.) klassische Sparfunktion: $s_p = 1, s_w = 0$

$$n = \frac{rK}{Y} : \frac{pK}{Y} = \frac{r}{p}\left(= \frac{r}{p_k} \cdot p_c \right)$$ ... Realrendite

Das entspricht der *„goldenen Regel der Akkumulation“*.

2.5 TECHNISCHER FORTSCHRITT

Technischer Fortschritt und Produktionsfunktion

Vereinfachung: Jedes Outputwachstum, das nicht auf einen Zuwachs an Arbeit oder an Kapital zurückgeführt werden kann, wird auf sogenannten „Technischen Fortschritt“ (T) zurückgeführt. (Neue Produktionsverfahren, neue Arbeitsorganisation, ...)

$$Y = f(A, K, T)$$

T ist schwer zu quantifizieren, da es das Ergebnis eines Komplexes verschiedener Aktivitäten - subsumiert unter dem Begriff „Innovation“ - ist.
Einfachste formale Beschreibung eines „unbekannten“ Prozesses: Er ist eine Funktion der Zeit $T = T(t)$.
Die Frage ist: Wie beeinflußt „technischer Fortschritt“ die beiden Produktionsfaktoren ?

Drei mögliche Spezialfälle:

1.) **Hicks-neutraler** „technischer Fortschritt“

$$Y_t = f(T(t)A, T(t)K) = T(t) \cdot f(A, K)$$

– Technischer Fortschritt kann von der Entwicklung der anderen beiden Faktoren völlig getrennt werden.
– Ceteris Paribus wirkt er verteilungsneutral

2.) **Harrod-neutraler** „technischer Fortschritt“

$Y = f(T(t)A, K)$ ... arbeitsproduktivitätserhöhender technischer Fortschritt

– Kapitalkoeffizient bleibt (bei konstanter Realverzinsung) konstant
– Kapitalintensität steigt im selben Ausmaß wie die Arbeitsproduktivität
$\Rightarrow$ Einkommensverteilung bleibt konstant (siehe neoklassisches Modell)

Allerdings:
Bei produktiverer Arbeit wird der gleichgewichtige Trade-off zwischen „mehr Gütern“ und „mehr Freizeit“ (bei statischen Präferenzordnungen) zu einem neuen Gleichgewicht mit geringerer Beschäftigung führen.

$\Rightarrow$ Problematik der „*technologischen Arbeitslosigkeit*“

– Empirisch verifizierbare Form des technischen Fortschritts

3.) **Solow-neutraler** „technischer Fortschritt“

$Y = f(A, T(t)K)$ ... kapitalproduktivitätserhöhender technischer Fortschritt

– Arbeitskoeffizient (bei konstantem Reallohn) bleibt konstant

– Kapitalintensität sinkt im gleichen Ausmaß wie der Kapitalkoeffizient

$\Rightarrow$ Einkommensverteilung bleibt unverändert

– Empirisch nur für bestimmte Entwicklungsphasen in 3.Welt-Ländern beobachtbar

Spezielle Produktionsfunktion

$$T(t) = T_0 e^{\gamma t}$$

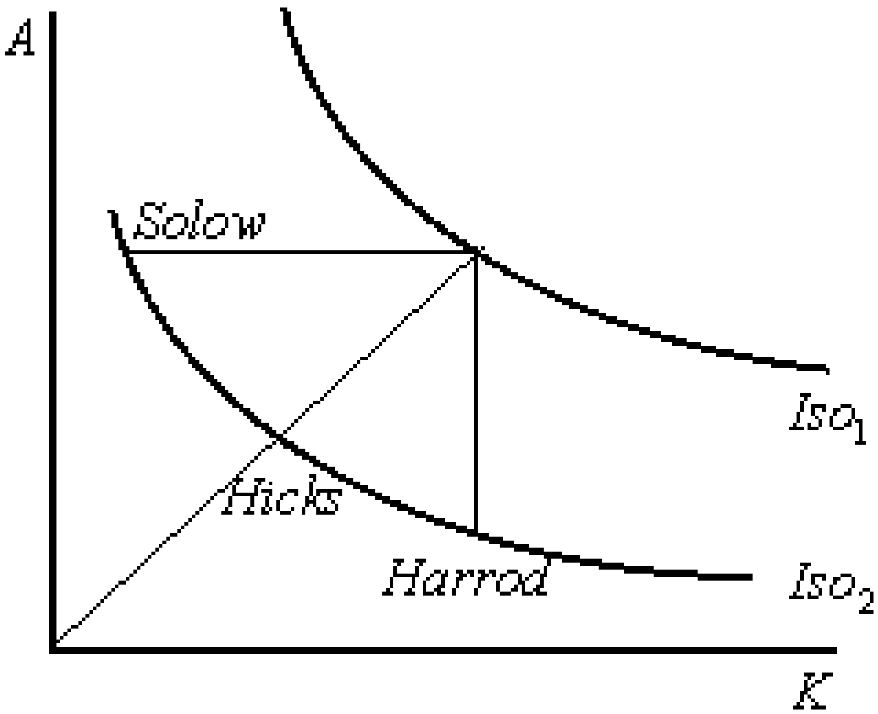
$T_0 = 1 \;\Rightarrow$ **Cobb-Douglas**:

$$Y = \gamma(t) A^{\alpha} K^{1-\alpha} \qquad \text{Hicks-neutral}$$

$$Y = [\gamma(t) A]^{\alpha} K^{1-\alpha} \qquad \text{Harrod-neutral}$$

$$Y = A^{\alpha} [\gamma(t) K]^{1-\alpha} \qquad \text{Solow-neutral}$$

Neutralitätskonzepte können ***nicht*** unterschieden werden!



Iso_1 ... vor technischem Fortschritt
Iso_2 ... nach technischem Fortschritt

Nur Beschreibung verschiedener Punkte auf ***derselben*** neuen Isoquante.

Unter Zugrundelegung (zumindest implizit) des neoklassischen Modells wird empirisch oft folgende Überlegung angestellt:

$$Y = e^{\gamma t} f(A, K) = e^{\gamma t} A^{\alpha} K^{1-\alpha}$$

$$\hat{Y} = \gamma + \alpha\hat{A} + (1-\alpha)\hat{K} \quad \Rightarrow \gamma = \hat{Y} - \alpha\hat{A} - (1-\alpha)\hat{K}$$

Empirisch sind α und (1-α) die Anteile von Kapital und Arbeit (Gewinne und Löhne) am Volkseinkommen.

Etwa: α = 0.7 , 1-α = 0.3 ;

wenn $\hat{Y} = 4\%$; $\hat{A}$ = 0.5% ; $\hat{K} = 3\%$

⇒ γ = 0.0275 (=: technischer Fortschritt)

Technischer Fortschritt und Steady State

1.) **Hicks-neutraler** technischer Fortschritt
Da im neoklassischen Modell im steady-state gilt: $\hat{Y}^* = \hat{K}^*$,
und andererseits (siehe Bsp.) $\hat{Y}^* = \gamma + \alpha\hat{A} + (1-\alpha)\hat{K}^*$
kann für jedes α > 0 am steady-state kein Hicks-neutraler technischer Fortschritt auftreten, denn:

durch Einsetzen

$$\hat{Y}^* = \frac{\gamma}{\alpha} + \hat{A}, \qquad \hat{y}^* = \frac{\gamma}{\alpha}$$

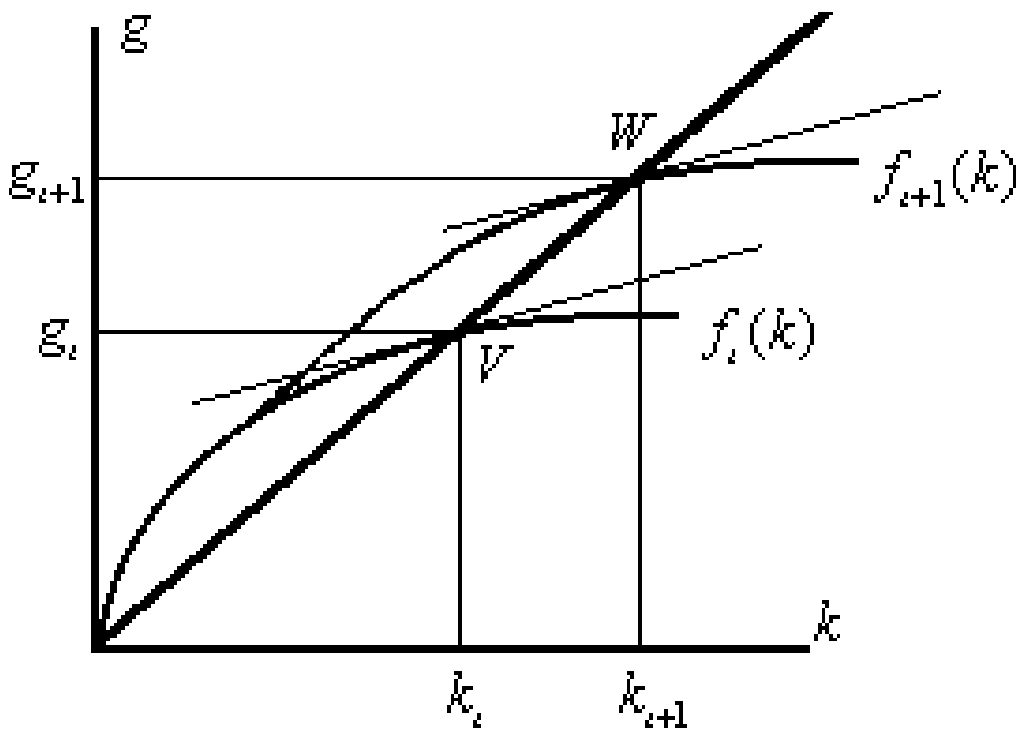
Andererseits muß gelten (Definition der Hicks-Neutralität):

$$\gamma = \hat{y}\left(= \left(\frac{Y}{A}\right)\right)$$ ⇒ **Widerspruch!**

2.) **Harrod-neutraler** technischer Fortschritt:

$$\hat{Y}^* = \alpha(\hat{A}+\gamma)+(1-\alpha)\hat{K}^*, \quad \hat{Y}^* = \hat{K}^*,$$
$$\Rightarrow \hat{Y}^* = \hat{A}+\gamma \quad \text{bzw. } \hat{y}^* = \gamma$$

d.h. Harrod-neutraler technischer Fortschritt ist im neoklassischen Wachstumsmodell einfach einzubeziehen.



– Konstanter Kapitalkoeffizient

– k und y steigen proportional

– konstante Realverzinsung

– konstante Einkommensverteilung

Technischer Fortschritt und Investitionen

– neues Wissen kommt nur in Form tatsächlicher Investitionsgüter (Investitionen im herkömmlichen Sinn) zum Einsatz. („embodied technical progress“)

– Jedes Investitionsgut stellt auch einen „Jahrgang" technischen Wissens dar (Daher: „Vintage models")

$\Rightarrow$ Kapitalstock ist inhomogen und kann bestenfalls durch Gewichtung über das jeweilige „Jahrgangswissen" homogenisiert werden:

$$\overline{K}_t = \sum_{v=0}^{t} I(v)(1+\gamma)^v$$

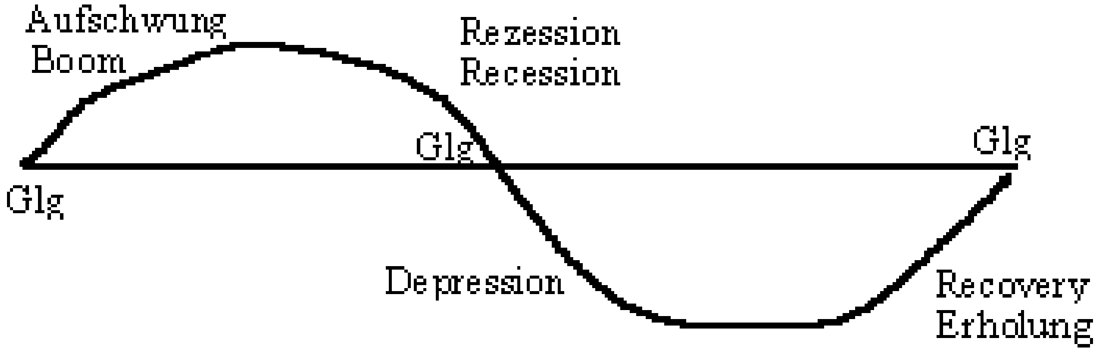
Noch etwas allgemeiner:

Sei $\left\langle \begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ a_{nj} \end{matrix} \right\rangle$ und l_j die Beschreibung eines Produktionsprozesses in einer IO-Matrix (also eine Spalte und der Arbeitskoeffizient).

Wird aus ökonomischen Überlegungen (Minimalkostenkombination, Gewinnmaximierung, ...) investiert, so ändert sich diese wenn neue Techniken angewandt werden (empirisch der Regelfall). Dieser Vorgang heißt **Innovation**. Dabei wird über einer Menge prinzipiell möglicher Produktionstechniken optimiert. (Die Optimierung erfolgt im Regelfall unter beschränkter Information.) Die Menge möglicher Produktionstechniken vergrößert sich stetig durch **Erfindungen -** und die erwarteten Gewinne und Kosten werden unter Anwendung von **Erwartungsbildungsmodellen** nicht nur für Preise und Löhne, sondern auch für künftige Techniken ermittelt!

3.1 SCHUMPETERS KONJUNKTURTHEORIE

Originalbuch:
Josef Alois Schumpeter, „Business Cycles“, 1939



– Zentral für den Kapitalismus ist die Innovationstätigkeit der Unternehmer

– Innovationen treten (im Gegensatz zu Erfindungen) zeitlich gebündelt auf („Swarming of innovations“)

– Sie bringen das System aus dem (Walras’schen) Gleichgewicht in einen Ungleichgewichtszustand

– Erst im Abebben der Innovationsflut zieht der Marktgleichgewichtsmechanismus das System wieder ins Gleichgewicht

– Durch ungleichgewichtige Erwartungsbildungsprozesse kann (muß aber nicht) das System über das Gleichgewicht hinunter, in eine Depression, gelangen.

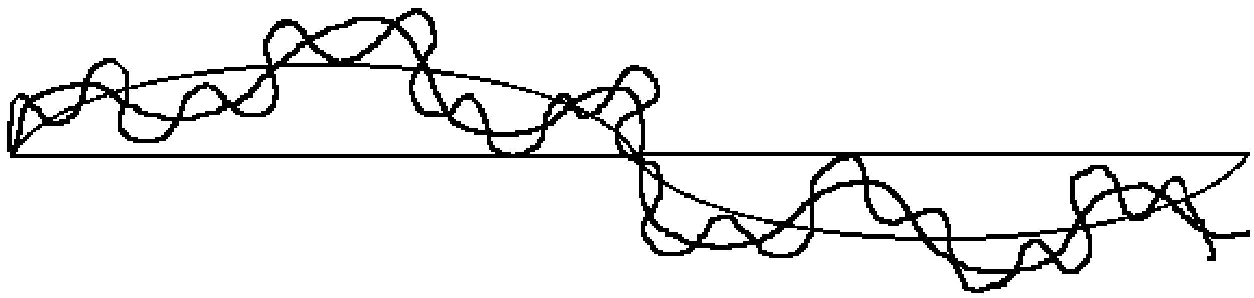
– Größte Schwierigkeit: Erklärung des unteren Wendepunktes. Meist sozio-ökonomische oder politische Gründe

⇒ Größte Leistung des kapitalistischen Systems („historische Aufgabe“ wie bei Karl Marx):

Technischer Fortschritt

Daher auch bei Schumpeter ein geschichtsphilosophischer Ansatz. Ende des Kapitalismus durch Ende der historischen Aufgabe vorhergesagt (Schumpeter, 1942).

Schumpeters 3-Zyklen-Theorie



lang: Kondratieff-Zyklus (~ 60 Jahre)

mittel: Konjunktur-Zyklus (Juglar - Zyklus) (~ 9 Jahre)

kurz: Kitchin-Zyklus (Lagerhaltungszyklus) (~ 3 Jahre)

Überlagerung aller drei Zyklen als (mental) ausschlaggebend für die Unternehmeraktivität angenommen.

⇒ Empirische Untersuchungen zu dieser Hypothese bestätigen sie oft
⇒ Unterschiedliche formale Spezifizierungen von Schumpters Ideen (Goodwin, Samuelson, ...)

3.2 METZLERS LAGERHALTUNGSZYKLEN

Originalartikel:
Metzler, 1941, *The Nature and Stability of Inventory Cycles*, RES 23, S.113-129.
Aufbereitet nach [Gandolfo, 1980]

Konsumfunktion: $C_t = bY_t$, mit: 0 < b < 1

Erwarteter Absatz: $U_t = C_{t-1}$

Die Firmen versuchen einen gewünschten Lagerbestand zu halten. Es wird angenommen, daß sie das durch Anstreben eines bestimmten Verhältnisses zwischen Lagerbestand und Absatz erreichen. Da der Absatz erst ex post bekannt ist, verwenden die Unternehmer den erwarteten Absatz und es gilt für den gewünschten Lagerbestand $\overline{Q}_t$:

$\overline{Q}_t = kU_t$ mit: k > 0

Die Änderung des Lagerbestandes Q ist daher:

$$\overline{Q}_t - Q_{t-1} = kU_t - Q_{t-1} = kbY_{t-1} - Q_{t-1}$$

Außerdem gilt:

$$Q_{t-1} = kbY_{t-2} - b(Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

wobei: kbY_{t-2} ... geplant $(= kU_{t-1})$, und

$b(Y_{t-1} - Y_{t-2})$ ... ungeplant $(= C_{t-1} - U_{t-1})$ war.

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\overline{Q}_t - Q_{t-1} = (1+k)bY_{t-1} - (1+k)bY_{t-2}$$

Nationalproduktsidentität: (mit autonomen Investitionen I_o)

$$Y_t = U_t + (\overline{Q}_t - Q_{t-1}) + I_0$$

Nochmaliges Einsetzen ergibt:

$$Y_t - (2+k)bY_{t-1} + (1+k)bY_{t-2} = I_0$$

Partikuläre Lösung für $\overline{Y}_t = const$:

$$\overline{Y}_t = \frac{1}{1-b} I_0$$

Charakteristische Gleichung der homogenen Gleichung:

$$\lambda^2 - (2+k)b\lambda + (1+k)b = 0$$

Die ***Stabilitätsbedingungen*** für eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = 0$ sind:

1.) $1 + a_1 + a_2 > 0$,

2.) $1 - a_2 > 0$,

3.) $1 - a_1 + a_2 > 0$

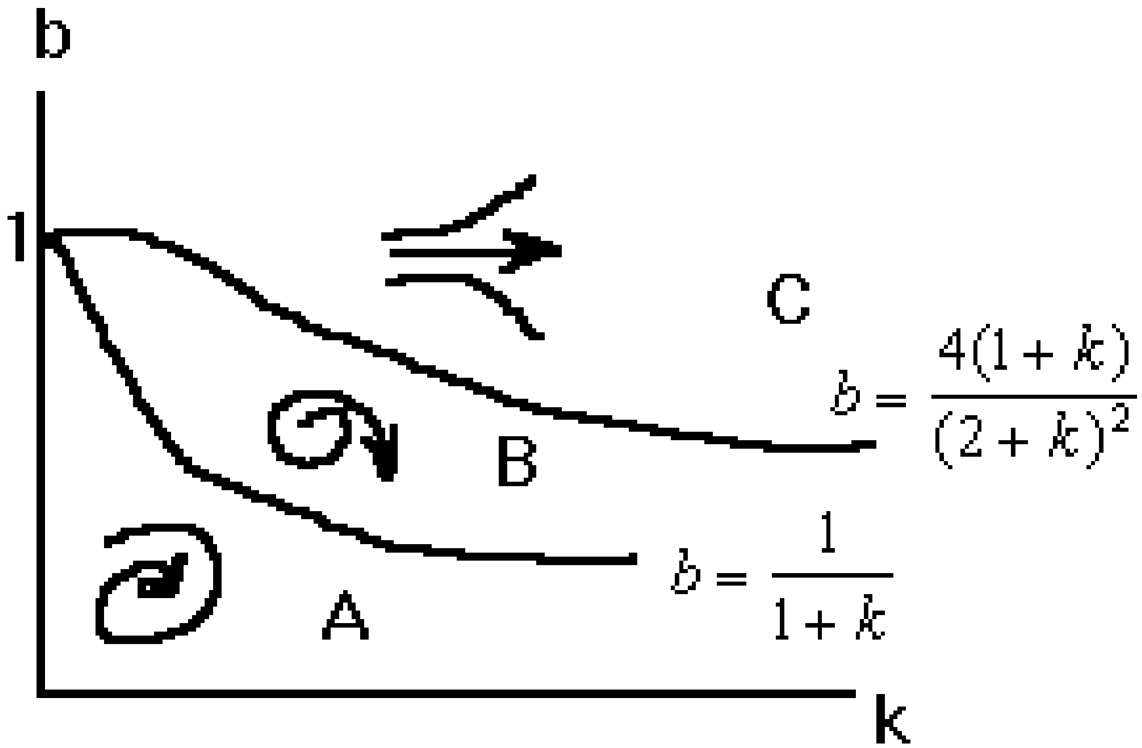
Für Stabilität muß daher gelten: $b < \frac{1}{1+k}$

Insbesondere gilt:

$A \rightarrow 0 < b < \frac{1}{1+k}$ oszillierend, konvergent

$B \rightarrow \frac{1}{1+k} < b < \frac{4(1+k)}{(2+k)^2}$ oszillierend, divergent

$C \rightarrow b \geq \frac{4(1+k)}{(2+k)^2}$ monoton, divergent



$\Rightarrow$ Es ist kein stabil monotones Verhalten möglich !

3.2.1 LAIDLERs MONETÄRES ZYKLUSMODELL

Modell:
M_t^D ... Geldnachfrage (nominal)
$\overline{M}_t^S$ ... Geldangebot (nominal)
p_t ... Preisniveau

– Geldnachfragefunktion:
$\frac{M_t^D}{p_t} = Y_t^\gamma$ mit: γ > 0, Y_t ... Volkseinkommen (real)
– Gleichgewicht am Geldmarkt:
$M_t^D = M_t^S (= p_t Y_t^\gamma)$ mit: Y_t^*... Vollbeschäftigungsoutput, y_t ... Kapazitätsauslastung
– Definition: $y_t := \frac{Y_t}{Y_t^*}$
– $g_{p,t} :=$ Inflationsrate: $g_{p,t} := \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$
– $\hat{g}_{p,t}$:= Inflationsfaktor: $\hat{g}_{p,t} := \frac{p_t}{p_{t-1}}$
– $\hat{g}_{p,t-1}^e$ ... erwarteter Inflationsfaktor der Vorperiode
– Preisentwicklung: $\hat{g}_{p,t} = y_t^\delta \hat{g}_{p,t-1}^e$ mit: δ > 0
– adaptive Erwartungsbildung: $\hat{g}_{p,t}^e = \left(\frac{\hat{g}_{p,t-1}}{\hat{g}_{p,t-1}^e}\right)^\varepsilon \hat{g}_{p,t-1}^e$ mit: ε > 0

Daraus ergibt sich Laidlers modifizierte **Phillips-Kurve**:

$$\frac{\hat{g}_{p,t}}{\hat{g}_{p,t-1}} = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^\delta \frac{\hat{g}_{p,t-1}^e}{\hat{g}_{p,t-2}^e} = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^\delta \left(\frac{\hat{g}_{p,t-1}}{\hat{g}_{p,t-2}^e}\right)^\varepsilon = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^\delta \left(\frac{\left(y_{t-1}\right)^\delta \hat{g}_{p,t-2}^e}{\hat{g}_{p,t-2}^e}\right)^\varepsilon = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^\delta \left(y_{t-1}\right)^{\varepsilon\delta}$$

d.h. Preise steigen mit dem Output (auch empirisch korrekt).
Einige Umformungen:

$$M_t^D = p_t Y_t^\gamma = p_t (y_t Y_t^*)^\gamma = \overline{M}_t^S$$

$$\frac{M_t^S}{M_{t-1}^S} = \frac{p_t}{p_{t-1}} \cdot \left(\frac{y_t}{y_{t-1}} \cdot \frac{Y_t^*}{Y_{t-1}^*}\right)^\gamma$$

$$\hat{g}_{M^s,t} = \hat{g}_{p,t} \cdot \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^\gamma \cdot \left(\hat{g}_{Y^*,t}\right)^\gamma$$

$$\frac{\hat{g}_{M^S,t}}{\hat{g}_{M^S,t-1}} = \frac{\hat{g}_{p,t} \cdot \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^{\gamma} \cdot \left(\hat{g}_{Y^*,t}\right)^{\gamma}}{\hat{g}_{p,t-1} \cdot \left(\frac{y_{t-1}}{y_{t-2}}\right)^{\gamma} \cdot \left(\hat{g}_{Y^*,t-1}\right)^{\gamma}}$$

Einsetzen der Phillipsgleichung liefert:

$$y_t \cdot y_{t-1}^{\frac{\delta\varepsilon-\gamma}{\delta+\gamma}-1} \cdot y_{t-2}^{\frac{\gamma}{\delta+\gamma}} = \left(\frac{\hat{g}_{M^S,t}}{\hat{g}_{M^S,t-1}} \Big/ \left(\frac{\hat{g}_{Y^*,t}}{\hat{g}_{Y^*,t-1}}\right)^{\gamma} \right)^{\frac{1}{\delta+\gamma}}$$

Annahme: $\hat{g}_{M^S,t}$ und $\hat{g}_{Y^*,t}$ sind über die Zeit konstant. $\Rightarrow$ rechte Seite gleich 1.

Logarithmen:

$$\ln y_t - \left(1 + \frac{\gamma - \delta\varepsilon}{\gamma + \delta}\right) \ln y_{t-1} + \frac{\gamma}{\gamma + \delta} \ln y_{t-2} = 0$$

Differenzengleichung 2. Ordnung für die Kapazitätsauslastung y_t!

Oszillationen treten auf, wenn: $\left(1 + \frac{\gamma + \delta\varepsilon}{\gamma + \delta}\right)^2 < \frac{4\gamma}{\gamma + \delta}$

Divergenz tritt auf, wenn:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{\gamma - \delta\varepsilon}{\gamma + \delta}\right)^2 + \frac{4\gamma}{\gamma + \delta} - \left(1 + \frac{\gamma - \delta\varepsilon}{\gamma + \delta}\right)^2} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \delta}} > 1$$ ist.

Da dies aber nur möglich ist, wenn δ < 0 ist (im Gegensatz zu den Annahmen) heißt das, daß das Modell stets (monoton oder oszillierend) konvergiert!

Das Modell exemplifiziert die bekannte monetaristische Aussage, daß Geldangebotsschocks langfristig keine Auswirkungen auf das System haben, wenn die langfristige Wachstumsrate $\hat{g}_{M^S}$ konstant bleibt.

3.3 DAS SAMUELSON-MODELL

(Multiplikator-Akzelerator-Modell)

Originalartikel:
J. Hicks, 1939, *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle*.
Aufbereitet nach [Gandolfo, 1980]

$$
\begin{aligned}
C_t &= cY_{t-1} \\
I_t &= v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \\
Y_t &= C_t + I_t + A
\end{aligned}
$$

mit: A ... autonomer Konsum

$$\Rightarrow Y_t - (c+v)Y_{t-1} + vY_{t-2} - A = 0$$

partikuläre Lösung: $Y_0 = \frac{1}{1-c} A = \frac{1}{s} A$

Durch Substitution

$$Z_t = Y_t - \frac{1}{s} A$$

erhält man eine homogene Differentialgleichung:

$$Z_t - (c+v)Z_{t-1} + vZ_{t-2} = 0$$

Die Lösung habe die Form: $Z_t = Z_0 \lambda^t$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (c+v)\lambda + v = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{c + v \pm \sqrt{(c+v)^2 - 4v}}{2}$$

Die reale Wurzel: $|\lambda| = 1$ ist die Grenze zwischen konvergentem und divergentem Verhalten.

Komplexe Wurzeln implizieren zyklisches Verhalten.

Grenze zwischen Zyklus und monotonem Verhalten:

$$(c+v)^2 - 4v = 0 \Rightarrow c = 2\sqrt{v} - v$$

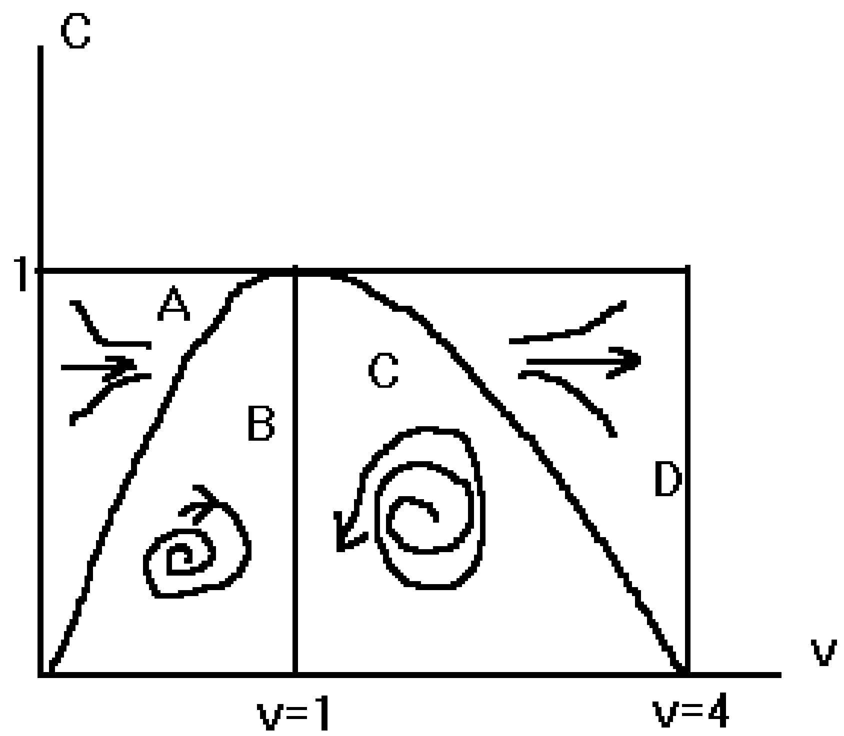
Im realen Fall dominiert λ_1, λ_2.

Da c < 1 ist, gilt für v < 1:

$$\lambda_1 < \frac{1+v+\sqrt{(1+v)^2 - 4v}}{2} = 1 \quad \Rightarrow \text{ Konvergenz}$$

Analog folgt Divergenz für v > 1

Daher:



Dynamisches Verhalten:

A: **Monoton, konvergierend**: Niedriger Akzelerator, hohe Konsumneigung. Empirisch betrachtet eher selten.

B: **Oszillierend, konvergierend**: Grundlage für „stochastische Konjunkturtheoriemodelle“: Konjunktur entsteht durch exogene Schocks, die durch die Systemdynamik wieder abklingen.

C: Von Hicks selbst angenommene Parameterkonstellation: **Oszillierend, divergierend**

D: **Monoton, divergierend**: Bereich in dem das Harrod’sche „Knife-edge“ - Wachstumsmodell gilt.

Bisheriges Modell betrachtet nur Schwankungen um ein festes Niveau von Y.

Erweiterung: $A_t = (1+g)^t A$

i.e. autonome Ausgaben wachsen mit der Rate g.
Man befinde sich in dem von Hicks angenommenen Parameterbereich C. Die sich ständig ausweitenden oberen und unteren Wendepunkte seien (duch Annahme eines ebensolchen Wachstums mit g) ökonomisch erreichbar.

$$Y_t - (c+v)Y_{t-1} + vY_{t-2} = A(1+g)^t$$

Betrachtet man den Steady-State mit $Y_t = Y_0(1+g)^t$ und setzt ein, so läßt sich Y_0 als Funktion von g und A darstellen:

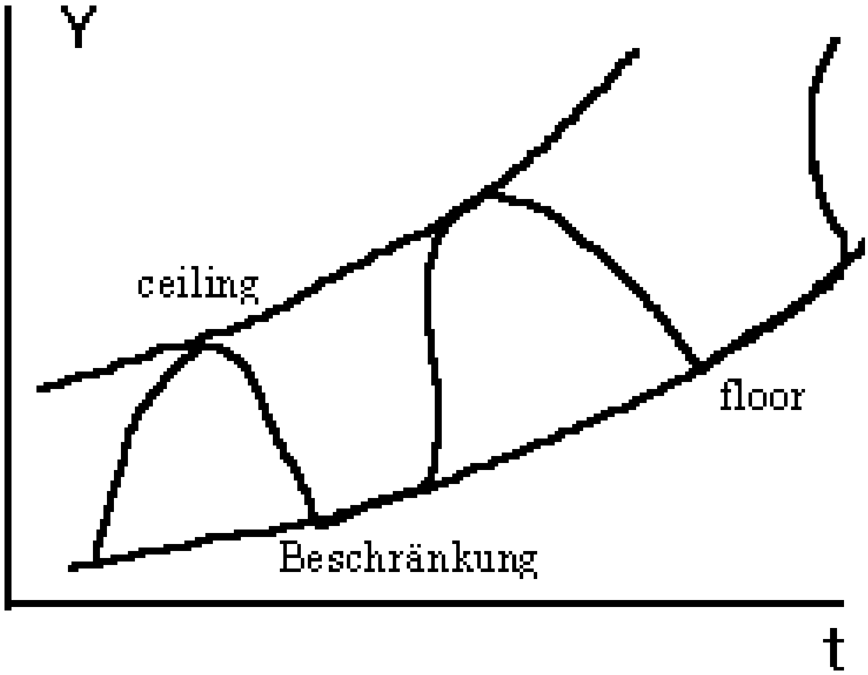
$$Y_0 = \frac{(1+g)^2}{(1+g)^2 - (c+v)(1+g) + v} A = \alpha(g)A$$

α(g) wird auch Hicks'scher Supermultiplikator genannt.
(Beachte: für g = 0: $\alpha(0) = \frac{1}{s}$!)

Da $\alpha'(g) = \dfrac{\frac{v(1-g)}{(1+g)} - c}{\left(s + g - \frac{vg}{(1+g)}\right)^2}$

gilt für g > 0: $\alpha(g) > \frac{1}{1-c} > 0$

Einführung von Schranken:



Für die untere Schranke (Depression) kann angenommen werden, daß der Akzelerator auf Grund von Überkapazitäten kurzfristig außer Kraft tritt und Y entlang der Beschränkung wächst. Obere Schranke (volle Kapazitätsauslastung) scheint empirisch weniger plausibel.

3.4. NEOKEYNESIANISCHE UND NEO-MARXISTISCHE MODELLE

Grundlegende Unterschiede zur Neoklassik:

Neoklassik:

- In der Neoklassik wird die gewünschte Wachstumsrate des **Kapitalstocks** durch Maximierung der Nutzen der Haushalte abgeleitet. Die Anzahl der Haushalte wächst mit einer exogenen Rate.
- Die **Beschäftigung** wird durch Angebot und Nachfrage bestimmt.
- **Arbeitsnachfrage** hat als Determinanten den jeweiligen Kapitalstock und die Technologie.
- **Arbeitsangebot** wird durch Bevölkerungswachstum und Präferenzen für Freizeit versus Güterkonsum bestimmt.

Durch das Gleichgewicht auf allen Märkten (insbesondere auch am Arbeitsmarkt) sind sowohl alle **Preise** als auch der **Lohnsatz** bestimmt. Der stabile gleichgewichtige Wachstumspfad bestimmt daher auch die **Verteilung** des Volkseinkommens.

Neo-Marxismus:

Ausgangspunkt ist die Teilung der Gesellschaft in soziale Klassen. Durch die relative Stärke der Arbeiterklasse (sprich: der „Unselbständigen“) wird unter Berücksichtigung von Technologie und institutionalisiertem Verhalten (Gewerkschaften, Kammern, ...) der **Reallohn** bestimmt. Der **Gewinn** der Unternehmer ergibt sich als Residuum und damit auch die Profitrate.

Unternehmer und Arbeiter haben **unterschiedliche Sparneigungen** und es ist die Sparrate der Unternehmer, die zusammen mit der Profitrate den Wachstumspfad bestimmt. Dadurch wird wiederum die **Preisstruktur** bestimmt. Anders als im neoklassischen Modell bestimmen die **Präferenzen** nur die Zusammensetzung des Konsums bei gegebenen Preisen.

Die Kausalität läuft also von der (ursprünglichen) Verteilung zum Wachstum!

Neo-Keynesianismus:

Im Zentrum steht die **Investitionsnachfrage**. Diese ist positiv korreliert mit der **erwarteten** Profitabiliät der Investitionen und bestimmt zusammen mit der Sparneigung der Unternehmer die gleichgewichtigen **Profitraten** und **Wachstumspfade**. Die Profitrate bei bestimmter Technologie determiniert den **Reallohn**.

Wie im neo-marxistischen Ansatz bestimmen die Präferenzen der Konsumenten zwar die **Zusammensetzung des Konsums**, nicht jedoch die Preisstruktur. Wachstumsrate und Einkommensverteilung werden simultan bestimmt.

Ein einfaches Produktionsmodell:

$X_t = C_t + a_1 X_{t+1}$ (Konsum und Investition)

$P = Wa_0 + (1+r)Pa_1$ (Verteilung)

Annahmen:
1.) Outputwachstum ist konstant: g
2.) Konsum pro „Arbeiter“ ist konstant
3.) Preis, Lohn und Profitrate sind konstant

$\Rightarrow$: $X = C + a_1(1+g)X \quad \vert :X$

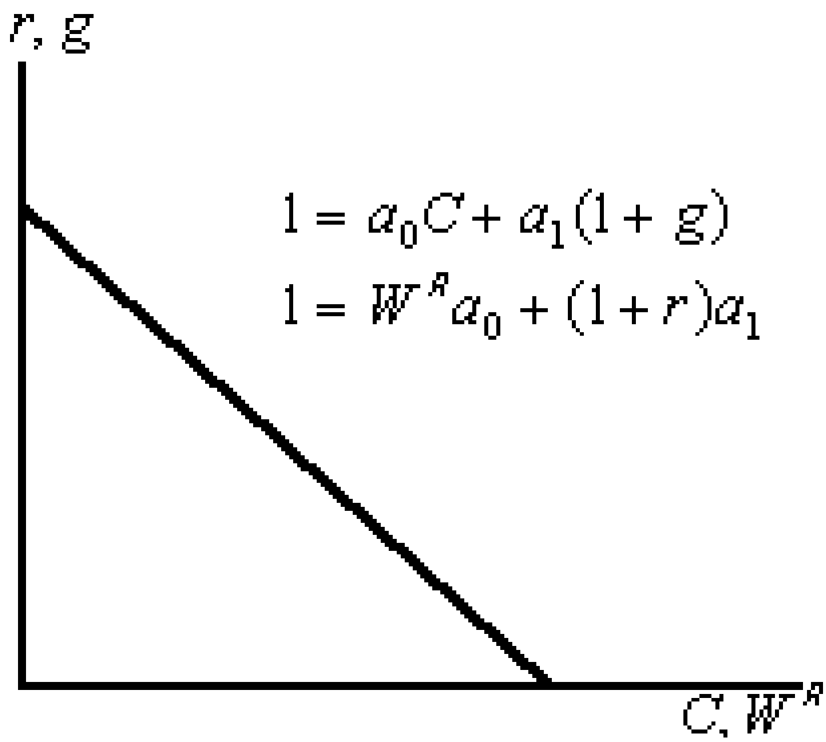
$1 = \frac{C}{X} + a_1(1+g)$ mit $a_o = \frac{L}{X}$ ... Arbeit pro Outputeinheit;

und der Normalisierung L = 1: $1 = a_0 C + a_1(1+g)$

Analog kann P normiert werden:

P = 1: $1 = W^R a_0 + (1+r)a_1$ mit: $W^R = \frac{W}{P}$ ... Reallohn

Graphische Darstellung



a_0, a_1 ... Technologie

Die Substitution zwischen Wachstum und Konsum findet mit derselben Rate wie diejenige zwischen Profitrate r (neoklassisch der Zinssatz) und Lohnsatz W^R statt. Nämlich mit der technologisch bestimmten Rate:

$$\frac{dg}{dc} = \frac{dr}{dW^R} = -\frac{a_0}{a_1}$$

Für gegebene Profitrate kann ein entsprechender Reallohn errechnet werden:

$$W^R(r) = \frac{1 - a_1}{a_0} - r\frac{a_1}{a_0}$$

Analog gilt:

$$r(W^R) = \frac{1-a_1}{a_1} - W^R \frac{a_0}{a_1}$$

$$C(g) = \frac{1-a_1}{a_0} - g \frac{a_1}{a_0}$$

$$g(C) = \frac{1-a_1}{a_1} - C \frac{a_0}{a_1}$$

4 Variable, 2 Gleichungen: 2 weitere Gleichungen sind nötig um das Modell zu lösen.

- **Neoklassik:** Zuerst Gleichungen für g und C
- **Neo-Marxismus:** Zuerst Bestimmung für w^R und C, dann r und g als Residuen
- **Neo-Keynesianismus:** Zuerst r und g, dann w^R und schließlich C als Residuum

Neoklassik:

exogen	endogen
$\left.\begin{matrix} a_o, a_1 \\ n \end{matrix}\right\} \Rightarrow$	C^*
$\left.\begin{matrix} a_o, a_1 \\ n \\ U(C^1, C^2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$	$W^*, r^*, \langle C^1(r^*), C^2(r^*) \rangle$

Neo-Marxismus:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a_0 C + a_1(1+g) \\ 1 &= W^R a_0 + (1+r)a_1 \end{aligned}\right\}$$

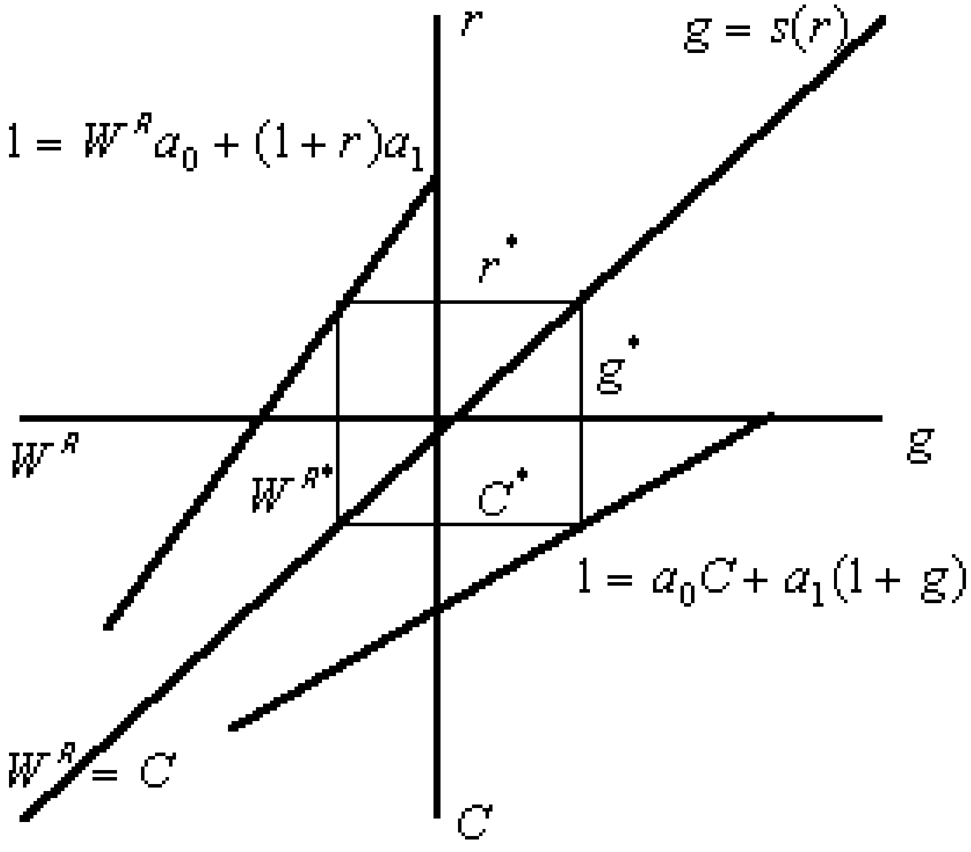
Subtrahieren und dividieren

$$(W^R - C) = (g-r)\frac{a_1}{a_0}$$

Annahme: Alle Löhne werden konsumiert, alle Gewinne werden gespart: $W^R = C$.

$g\frac{a_1}{a_0} = r\frac{a_1}{a_0}$ Gewinn pro Arbeiter ist gleich Investition pro Arbeiter.

„Klassische Sparfunktion“: $g = s(r) = r$.



Zusätzliche Gleichungen:

$W^R = W^{R^*}, \quad g = s(r) = r$

exogen endogen

$$\left.\begin{array}{l} a_1, a_0 \\ W^{R*} \\ g = r \end{array}\right\} \Rightarrow g^*, r^*, C^* \quad \text{sind unabhängig von n!}$$

Auch a_0, a_1 sind vom Klassenkampf bestimmt.

Der Neo-Keynesianische Ansatz

Annahmen:

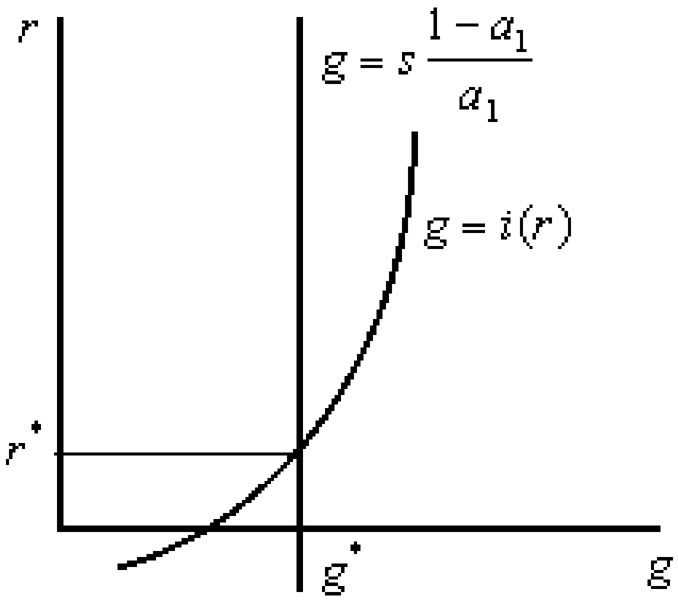
1.) Investitionen hängen von der erwarteten Profitrate (positiv) ab. Im steady-state ist die erwartete Profitrate gleich der realisierten und (da der Kapitalstock mit der Rate g wächst) gilt: $g = i(r)$

2.) Sparfunktion: auf „pro-Arbeiter Basis":

$\frac{1-a_1}{a_0}$ ... Netto-Output pro Arbeiter

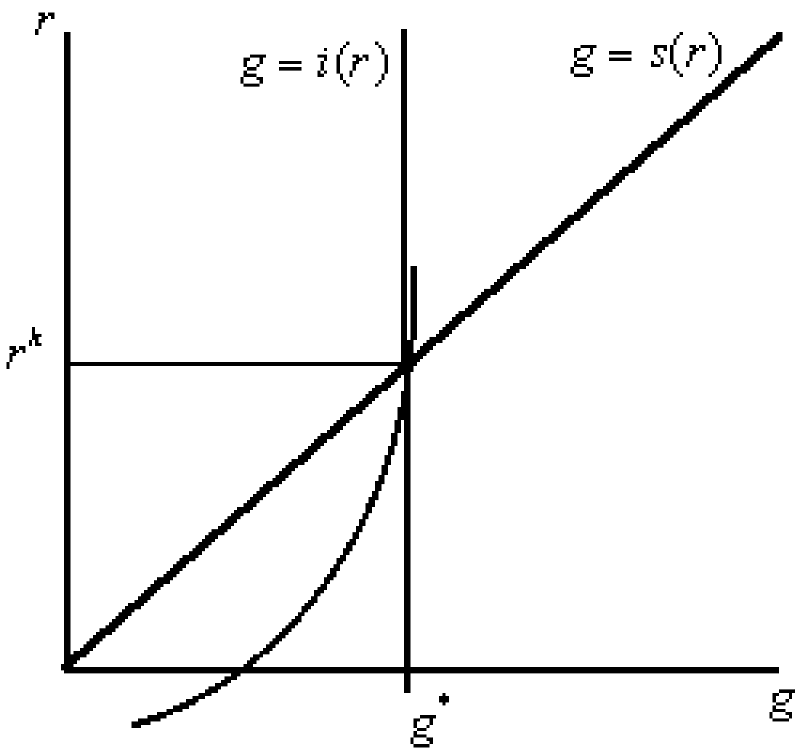
$s \cdot \frac{1-a_1}{a_0}$ ... Sparen pro Arbeiter

Im Gleichgewicht muß gelten: $g \frac{a_1}{a_0} = s \cdot \frac{1-a_1}{a_0} \quad \Leftrightarrow \quad g = s \cdot \frac{1-a_1}{a_1}$



Instabiles Gleichgewicht, wenn die Profitrate mit der Überschußinvestitionsnachfrage steigt (wie bei Harrod).

⇒ Neo-Keynesianer nehmen klassische Sparfunktion an:
g = s(r) = r



Zusätzliche Gleichungen:

$$g = i(r)$$

$$g = s(r) = r$$

exogen	endogen
a_0, a_1 $g = i(r)$ $g = r$	$\Rightarrow \; g^*, r^*, W^*, C^*$

3.5. DAS GOODWIN MODELL

Originalartikel:
Richard Goodwin, „A Growth Cycle“, 1967.
Aufbereitet nach [Goodwin, 1980, S.474-481]

Modell:

1.) Stetiger exogener technischer Fortschritt,

a ... Arbeitsproduktivität (kontinuierliche Zeit)

$$\frac{Y}{L} = a = a_0 e^{\alpha t}$$ mit: $\alpha > 0$ ... konst.

2.) Konstantes Wachstum des Arbeitsangebotes:

$$N = N_0 e^{\beta t}$$ mit: $\beta > 0$ ... konst.

Beachte: L ... Beschäftigung ist zu unterscheiden von
N ... Arbeitsangebot

3.) Es gibt 2 Produktionsfaktoren: Arbeit und Kapital, beide homogen und ohne Zeitspezifikation (kein vintage-Modell).

4.) Alle Größen werden als real und netto gemessen (keine Theorie des Preisniveaus, keine Abschreibungen).

5.) Alle Löhne werden konsumiert, alle Gewinne gespart und automatisch investiert.

6.) Die capital/output - ratio ist konstant: $k := \frac{K}{Y}$ ... konst.

7.) Der Reallohn steigt, wenn sich das System in Richtung Vollbeschäftigung bewegt.

Die letzten beiden Annahmen sind eher empirischer Natur, die anderen „stylized assumptions“.

$u := \frac{Lw}{Y} = \frac{w}{a}$ mit: u ... Anteil der Arbeiter am Output

Der Anteil der Unternehmer ist daher: $1 - \frac{w}{a}$

Die Profitrate ist $\frac{\left(1 - w/a\right)Y}{K}$

Mit Annahmen 4, 5 und 6 folgt:

$$\frac{\left(1 - w/a\right)Y}{K} = \frac{1 - w/a}{k} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y}$$

Ableitung der Gleichung ad 1) nach der Zeit gibt:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = \alpha \Rightarrow \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \alpha$$

Einsetzen: $\frac{\dot{L}}{L} = \frac{1 - w/a}{k} - \alpha$

Definition des Beschäftigungsquotienten v:

$$v := \frac{L}{N} \Rightarrow \frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{N}}{N}$$

Mit $\frac{\dot{N}}{N} = \beta$ (laut Annahme 2) gilt:

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{1 - w/a}{k} - (\alpha + \beta) = \frac{1-u}{k} - (\alpha + \beta)$$

Annahme 7 kann folgendermaßen operationalisiert werden:

Lineare Näherung: $\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho v$

Logarithmieren und differenzieren von der Definition von u:

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{\dot{w}}{w} - \alpha$$

einsetzen: $\frac{\dot{u}}{u} = -(\alpha + \gamma) + \rho v$

Daraus folgen die 2 fundamentalen Gleichungen des Systems:

$$\dot{v} = \left[\left(\frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right) - \frac{1}{k} u \right] v$$

$$\dot{u} = \left[-(\alpha + \gamma) + \rho v \right] u$$

Substitutiert man nun folgendermaßen:

$$a_1 := \frac{1}{k} - (\alpha + \beta), \quad a_2 := \alpha + \gamma, \quad b_1 := \frac{1}{k}, \quad b_2 := \rho \ ,$$

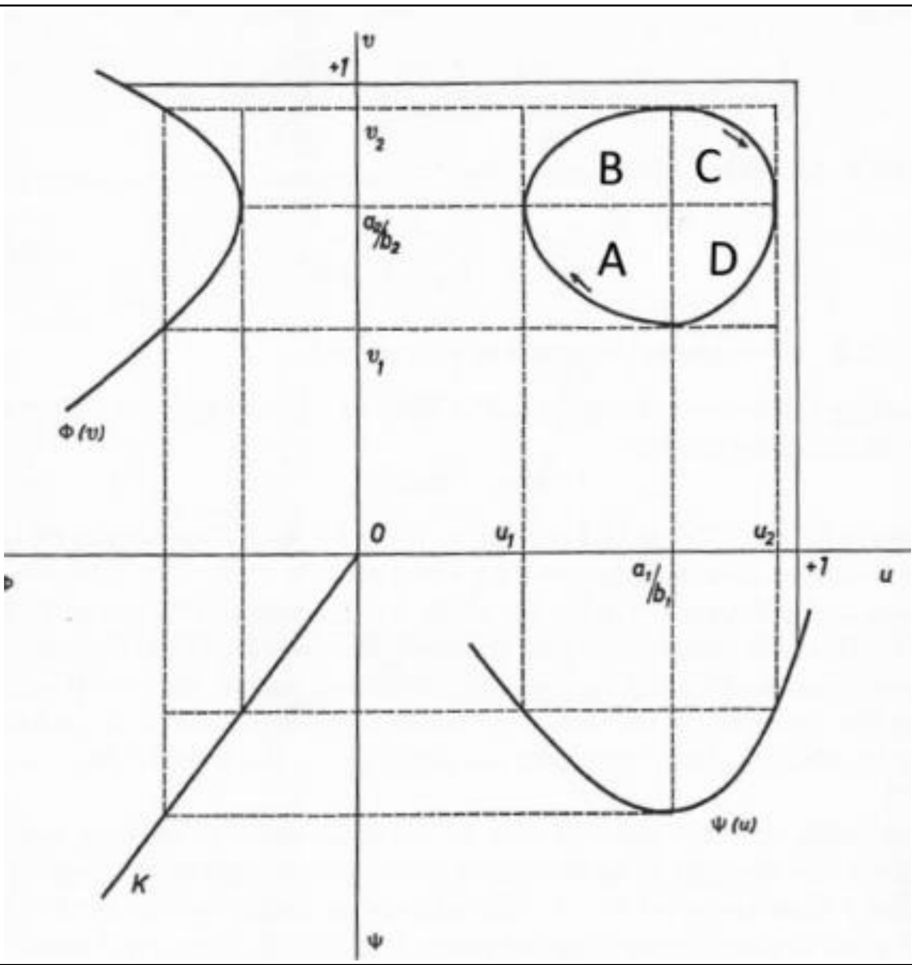
so ergeben sich die sogenannten Lotka-Volterra Gleichungen:

$$\dot{v} = (a_1 - b_1 u)v$$

$$\dot{u} = (a_2 - b_2 v)u$$

(Entwickelt von Volterra zur Beschreibung von Populationszyklen großer und kleiner Fische in der Adria).

Graphische Darstellung



Wirtschaft wandert auf einem Grenzzyklus:
A: Große Profite, starkes Wachstum, Beschäftigung steigt, Reallohn steigt $\Rightarrow$
B: Gewinne fallen auf Durchschnittsniveau ($\frac{a_1}{b_1}$), höchste Beschäftigung, aber Wachstumsverlangsamung, Bschäftigung sinkt $\Rightarrow$
C: Durchschnittbeschäftigung ($\frac{a_2}{b_2}$), höchster Lohnanteil am Output (u_2), Beschäftigung fällt weiter bis D.

All das bei stetigem Produktivitäts- und Outputwachstum. D.h. absolute Niveaus (z.B. Reallohn) müssen nicht fallen, Parameteränderungen verändern nur die Schwere des Konjunkturzyklus, nicht das dynamische Verhalten des Systems („Grenzzyklus“). Diese Eigenschaft eines Systems heißt „strukturelle Stabilität“.
Nur bei ganz bestimmten Konstellationen verschwindet der Zyklus in Z (d.h. $\dot{v} = 0 \wedge \dot{u} = 0$). In Z kollapiert der Zyklus zum Harrod’schen Wachstumsmodell (siehe Kapitel 2.1).

Erweiterungen des Goodwinmodells

1.) ***Desai*** „Growth Cycles and Inflation in a Model of the Class Struggle“, JET, 1973.
– Phillipskurve statt Reallohngleichung 7

– Preistheorie mit Mark-up Pricing (⇒ schwächere Reallohnentwicklung als bei Goodwin)
– Variabler Kapitalkoeffizient (abhängig vom Beschäftigungsniveau)
– Einbau von Preiserwartungen (⇒ Preis- und Lohnzyklen werden gedämpft)

2.) Das ***Wolfstetter*** Modell, „Fiscal Policy and the Classical Growth Cycle“, ZfN, 1982.
– Erweiterung um einen Staatssektor. Studiert unterschiedliche Besteuerungsregeln
– Alternative Formulierung eines variablen Kapitalkoeffizienten

3.) Das Modell von ***Sato*** „Marx-Goodwin Growth-Cycles in a Two-Sector-Economy“, ZfN, 1985.
– Zwei Sektorenmodell ⇒ Ergebnisse (Zyklen) an mehr Bedingungen geknüpft - weniger allgemein
– Reallohnschranke und Vollbeschäftigungsschranke eingeführt.

3.6. DAS DAY MODELL

Originalartikel:
Richard Day, „Irregular Growth Cycles“, AER, 1982.
Aufbereitet nach [H.-W. Lorenz, 1993, S.138-143]

Day modifiziert das folgende neoklassische Modell:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= C_t + I_t \\
I_t &= K_{t+1} \\
S_t &= Y_t - C_t = s \cdot Y_t \\
Y_t &= F(K_t, L_t) \\
L_t &= (1+n)^t L_0
\end{aligned}
$$

mit s>0 und n>0.

Es wird also eine Abschreibungsrate des Kapitalstocks von 100% pro Zeiteinheit gewählt. Wie in Kapitel 2.2 ausgeführt kann das Modell auf

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} = s \cdot F(K_t, L_t) / L_t \quad \text{bzw.} \quad k_{t+1} \cdot (1+n) = s \cdot f(k_t)$$

reduziert werden (Notation wie unter 2.2). Das instabile Gleichgewicht ist demnach bei k* gleich null gegeben, während (unter den üblichen Annahmen) ein einziges, stabiles Gleichgewichtswachstum bei

$$k^* = s \cdot f(k^*) / (1+n)$$

vorliegt.

Day's Innovation liegt nun in der Einführung einer speziellen Produktionsfunktion:

$$f(k_t) = B \cdot k_t^{ß} \cdot (m - k_t)^{\gamma} \qquad \text{mit} \qquad k_t \leq m = const$$

Er interpretiert den Term $(m - k_t)^{\gamma}$ als Einfluß der Umweltverschmutzung auf den pro-Kopf-Output: Wenn die Kapitalintensität steigt, so steigt auch die Umweltverschmutzung und ein wachsender Teil der Ressourcen muß zu deren Bekämpfung eingesetzt werden, statt zur Produktion zur Verfügung zu stehen. Die Konstante m führt gewissermaßen eine obere Schranke der Kapitalintensität ein, bei der bereits alle Ressourcen zur Umwelterhaltung eingesetzt werden müssen und der Output auf null fällt.

Einsetzen dieser Produktionsfunktion ergibt

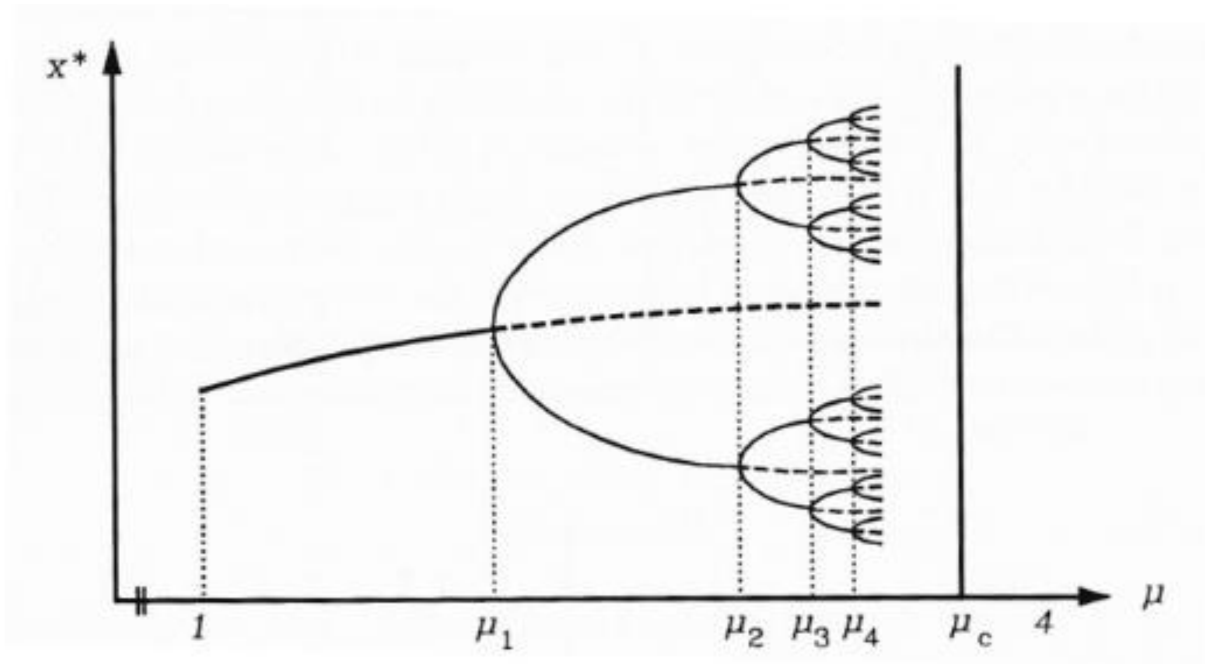
$$k_{t+1} = \frac{s \cdot B \cdot k_t^{\beta} \cdot (m - k_t)^{\gamma}}{(1+n)}$$

Man betrachte zunächst den Fall der speziellen Parameterwerte β = γ = m = 1 und sei $\mu := \frac{s \cdot B}{1+n}$.

Dann gilt

$$k_{t+1} = \mu \cdot k_t \cdot (1 - k_t)$$

Gleichungen dieser Form heißen „logistische Gleichungen" und stellen den einfachsten Prozeß chaotischen Verhaltens bei diskreter Zeit dar, wenn μ in einem bestimmten Parameterbereich liegt.



Da μ längerfristig von „technischem Fortschritt“ B, Bevölkerungswachstum n und Sparquote s abhängt sind unschwer langsam wirkende Dynamiken einführbar, die das System notwendig in den chaotischen Bereich treiben.

Das Day Modell gilt daher als Prototyp chaotischer Modelle in der Wachstumstheorie.